

Rodrigo Lisita Ribera

Escoamentos Compressíveis

Ciências Térmicas

*CT

www.cienciastermicas.com

Agradecimentos

Agradeço ao CNPQ, à CAPES e à PETROBRÁS, que durante minha caminhada acadêmica me contemplaram com bolsas de Iniciação Científica, Mestrado, Doutorado e Pesquisa.

Dedico a todos os meus alunos.

Lista de ilustrações

Figura 1.1 – Escoamento na atmosfera terrestre. Fonte: < https://earthobservatory.nasa.gov/images/83754/springtime-in-the-gulf-of-alaska >	17
Figura 1.2 – Um fluido deforma continuamente quando sujeito à tensão de cisalhamento.	18
Figura 1.3 – Viscosidade do fluido. Fonte: < https://maxi-miser.com/what-is-viscosity/ >	19
Figura 1.4 – Superfície pressão - volume - temperatura	20
Figura 1.5 – No escoamento transônico, o objeto pode se mover a velocidades menores do que a do som. Entretanto, devido ao perfil aerodinâmico, o escoamento pode ser acelerado em determinadas partes, atingindo velocidades supersônicas. Observe na figura que o escoamento está a $M = 0,8$ mas é acelerado ao longo da superfície superior. fonte: < http://www.boldmethod.com/learn-to-fly/aerodynamics/wing-sweep/ >	23
Figura 1.6 – A onda de choque ocorre devido à aceleração do escoamento ao longo da superfície aerodinâmica. fonte: a) < https://www.christography.com/aviation >	24
Figura 1.7 – fonte: < https://history.nasa.gov/SP-4219/Chapter3.html >	25
Figura 1.8 – Choque pode ocorrer em escoamento transônico, conforme o fluido é acelerado pela superfície. Esse choque se move para a cauda do aerofólio com o aumento da velocidade. Fonte: < https://teamuv.org/tag/hypersonic/ >	25
Figura 1.9 – Aeronave Bell X-1-1 em vôo. Três aeronaves foram inicialmente construídas pela Bell Aircraft Corporation para uma cooperação entre a National Advisory Committee for Aeronautics (NACA) e Força aérea dos Estados Unidos, iniciando a série de aeronaves experimentais X. Apesar de projetadas para decolagem convencional, durante os testes eram lançadas no ar por bombardeiros modificados Boeing B-29 ou B-50. Fonte: < https://airandspace.si.edu/collection-objects/bell-x-1-glamorous-glennis-nasm/bell-x-1-glamorous-glennis >	26
Figura 1.10 – Construía em alumínio com tanques em aço, seus contornos foram inspirados numa bala calibre 0.5. Fonte: < https://airandspace.si.edu/collection-objects/bell-x-1-glamorous-glennis-nasm/bell-x-1-glamorous-glennis >	27
Figura 1.11 – Aeronave SR-71 atingia Mach 3.5. Fonte: < https://www.nasa.gov/centers/dryden/multimedia/imagegallery/SR-71/ >	28
Figura 1.12 – a) Onda de choque oblíqua; b) Onda de choque normal. fonte: McGraw-Hill Concise Encyclopedia of Physics. © 2002 by The McGraw-Hill Companies, Inc.	28
Figura 1.13 – Choques Normal e Oblíquo. Fonte: < https://www.hq.nasa.gov/office/pao/History/SP-440/ch6-2.htm >	29

Figura 1.14–Onda de choque formada devido ao escoamento sobre um corpo rombudo viajando à velocidade supersônica. Na região central o choque pode ser considerado normal, mas à medida que se afasta da linha de centro o choque é oblíquo. fonte: McGraw-Hill Concise Encyclopedia of Physics. © 2002 by The McGraw-Hill Companies, Inc.	29
Figura 1.15–Fotografia de uma bala em vôo supersônico, publicada por Ernst Mach em 1887. fonte: < https://history.nasa.gov/SP-4219/Chapter3.html >	30
Figura 1.16–Uma bala em vôo com $M = 1,5$, capturada por um instrumento denominado shadowgraph. fonte: < https://www.nasa.gov/mission_pages/galex/20070815/ >	30
Figura 1.17–Uma imagem da vizinhança da estrela OB HD77581 e (não visível opticamente) Vela X-1, obtida com o telescópio Dinamarquês em La Silla. Claramente mostra a presença de uma onda em arco, confirmando que o sistema se encontra em movimento. É uma das ondas em arco em formato parabólico mais perfeitas já observadas em volta de uma estrela em movimento OB. Fonte: < https://www.eso.org/public/brazil/images/eso9702a/?lang >	31
Figura 1.18–A onda de choque também pode ocorrer quando se insere um medidor, como o tubo de Pitot, no escoamento supersônico. O efeito da onda de choque deve ser levado em consideração para se medir adequadamente a velocidade do escoamento. fonte: < http://nptel.ac.in/courses/101103004/module7/lec6/4.html >	31
Figura 1.19–Choque Oblíquo. Fonte: < https://www.nasa.gov/image-feature/stark-beauty-of-supersonic-shock >	
Figura 1.20–Interação de ondas de choque em aeronaves T-38, voando em velocidade supersônica em formação, aproximadamente 30pés de distância uma da outra, utilizando a técnica fotográfica schlieren. As ondas são tipicamente ouvidas em solo como o boom sônico Fonte: < https://www.flickr.com/photos/nasacommons/33433414158 >	32
Figura 1.21–Conforme o escoamento acelera a onda se aproxima da fuselagem. fonte: < https://history.nasa.gov/SP-367/f99.htm >	33
Figura 1.22–Modelo x-15 em túnel de vento a Mach 3.5 (acima) e Mach 6 (abaixo), detalhando o padrão da onda de choque formado. Fonte: < https://history.nasa.gov/SP-60/ch-5.html >	34
Figura 1.23–Essas quatro imagens por (shadowgraph) representam conceitos iniciais para veículos de reentrada. Shadowgraph é um processo que torna visível as perturbações que ocorrem no escoamento a altas velocidades, na qual a luz passando pelo escoamento é refratada pelos gradientes de massa específica no fluido, resultando em áreas claras e escuras numa tela posicionada atrás do fluido. H. Julian Allen foi pioneiro na teoria de corpos rombudos, que tornaram possível o projeto de escudos térmicos utilizados nas cápsulas espaciais Mercury, Gemini e Apollo, possibilitando que os astronautas sobrevivessem à reentrada na atmosfera terrestre. Um corpo rombudo produz uma onda destacada, que protege o veículo de aquecimentos excessivos. Assim, um veículo de formato rombudo permanece mais frio do que um pontudo, com menor arrasto. Fonte: < https://www.flickr.com/photos/nasacommons/16374997425 >	35
Figura 1.24–Escoamento hipersônico. Fonte: < https://teamuv.org/tag/hypersonic/ >	36
Figura 1.25–A terceira aeronave de pesquisa hipersônica X-43A, com um foguete Pegasus, levada para lançamento por um B-52B do centro de pesquisa Dryden Flight Research Center em 16 de Novembro de 2004. A aeronave X-43A atingiu a velocidade desejada de Mach 10. Fonte: < https://www.nasa.gov/centers/dryden/multimedia/imagegallery/X-43A/EC04-0325-23.html >	36
Figura 2.1 – Um recipiente com paredes rígidas sem troca de massa recebendo calor de uma fonte externa é um sistema fechado	42

Figura 2.2 – Um sistema fechado to tipo pistão-cilindro recebe calor de uma fonte externa e realiza trabalho sobre a vizinhança à pressão constante	42
Figura 2.3 – Um sistema fechado recebendo trabalho de uma fonte externa sofrerá aumento de sua energia E e conseqüentemente aumento de sua temperatura. New determination of the mechanical equivalent of heat, 1878	49
Figura 2.4 – Um sistema fechado com paredes rígidas recebendo calor de uma fonte externa à volume constante sofrerá aumento de sua energia $dE = m.c.\Delta T$.	56
Figura 2.5 – Um sistema fechado to tipo pistão-cilindro recebe calor de uma fonte externa à pressão constante sofrerá aumento de sua energia $dE = m.c.\Delta T$. .	57
Figura 2.6 – Uma fonte quente à temperatura T_Q	58
Figura 3.1 – Diagrama Temperatura-entropia obtido com a equação $\Delta s = c_P \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$ para o ar, com $c_P = 1,004 \left[\frac{KJ}{kg.K}\right]$ e $R = 0,287 \left[\frac{KJ}{kg.K}\right]$. A expansão isoentrópica ocorre de $1 \rightarrow 2_s$ enquanto na expansão real de $1 \rightarrow 2_r$ ocorre aumento de entropia e conseqüentemente aumento da temperatura real após a expansão.	74
Figura 5.1 – Uma frente de onda se movimentando com velocidade c da direita para a esquerda	79
Figura 5.2 – Ondas sonoras emitidas em intervalos regulares se distanciam da fonte de emissão estacionária	84
Figura 5.3 – Objeto se move para a direita com $M < 1$. A onda sonora maior foi emitida quando o objeto estava na posição P_1 , no instante de tempo t_0 . Após N intervalos de tempo dt ela percorre uma distância $N.dt$. Após o primeiro intervalo de tempo uma segunda onda sonora é emitida, mas o objeto se moveu para a direita (posição P_2), resultando em maior frequência das ondas sonoras no sentido de seu movimento	84
Figura 5.4 – A fonte sonora P se move para a direita com $M = 1$. A onda sonora maior foi emitida no instante de tempo t_0 . Após o primeiro intervalo de tempo a segunda onda sonora é emitida, mas o objeto se moveu para a direita com a mesma velocidade que a onda sonora.	85
Figura 5.5 – A fonte sonora P se move para a direita com $M > 1$. O objeto fica à frente das ondas sonoras, formando uma região conhecida como cone de Mach, zona em que é possível ouvir a fonte sonora. Fora do cone existe uma zona de silêncio.	85
Figura 5.6 – O ângulo α define o cone de Mach	86
Figura 6.1 – Razão entre propriedades de estagnação e estáticas em função do número de Mach para o ar ($k=1,4$)	90
Figura 7.1 – A aeronave Bell X-1 utilizou um motor a foguete com propelente líquido da Reaction Motors, Inc, gerando 6000lbf de empuxo. Fonte: < https://airandspace.si.edu/collection-objects/bell-x-1-glamorous-glennis/nasm_A19510007000 >	93
Figura 7.2 – Um bocal convergente-divergente permite acelerar um escoamento subsônico para supersônico, com Mach unitário na área mínima	98
Figura 7.3 – Um bocal divergente-convergente não leva um escoamento subsônico para supersô	98
Figura 7.4 – Razão entre massa específica característica e estática em função de Mach .	99
Figura 7.5 – Razão entre velocidade característica e estática em função de Mach	100
Figura 7.6 – Para dada razão entre área e área crítica, dois pontos no gráfico satisfazem a equação: um subsônico e outro supersônico.	101
Figura 8.1 – A onda destacada no corpo rombudo alivia as altas temperatura a que aeronaves estão sujeitas na reentrada da atmosfera. Fonte: < https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Heatshield-test3.jpg(27/04/2020) >	103

Figura 8.2 – Preparação no Hangar S em Cabo Canaveral, Flórida, da cápsula Wally Schirra Mercury 8, apelidada de Sigma 7 para ser acoplada ao veículo de lançamento Atlas. Imagem S62-05141, de 10/09/1962. Fonte: https://www.flickr.com/photos/nasacom/27/04/2020	104
Figura 8.3 – Choque normal. Mach após o choque em função do Mach antes do choque para o ar, com $k = 1,4$	108
Figura 8.4 – Choque normal. Razão entre massas específicas após e antes do choque em função do número de Mach antes do choque para o ar, com $k = 1,4$	109
Figura 8.5 – Choque normal. Razão entre as pressões após e antes do choque em função do número de Mach antes do choque para o ar, com $k = 1,4$	110
Figura 8.6 – Choque normal. Razão entre as temperaturas após e antes do choque em função do número de Mach antes do choque para o ar, com $k = 1,4$	111
Figura 9.1 – Razão entre as pressões em escoamento de Rayleigh	116
Figura 9.2 – Razão entre temperaturas para escoamento de Rayleigh	117
Figura 9.3 – Escoamento unidimensional com troca de calor. Razão entre a temperatura estática e sônica para o ar, com $k = 1,4$	120
Figura 9.4 – Escoamento unidimensional com troca de calor. Razão entre a Pressão estática e sônica para o ar, com $k = 1,4$	121
Figura 9.5 – Escoamento unidimensional com troca de calor. Razão entre a massa específica estática e sônica para o ar, com $k = 1,4$	121
Figura 9.6 – Escoamento unidimensional com troca de calor. Razão entre a pressão de estagnação estática e sônica para o ar, com $k = 1,4$	122
Figura 9.7 – Escoamento unidimensional com troca de calor. Razão entre a temperatura de estagnação estática e sônica para o ar, com $k = 1,4$	122
Figura 9.8 – Quantidades de calor para levar a entrada e a saída para a condição sônica	123
Figura 9.9 – Diagrama de Rayleigh (ds vs h) para diferentes valores de Mach inicial. O valor da variação da entropia é calculado por $ds = c_P \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - R \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right)$ e no eixo y o valor logarítmico da razão de entalpia ou temperatura $\frac{h_2}{h_1} = \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{1+k.M_1^2}{1+k.M_2^2} \right)^2 \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2$	126
Figura 9.10–Para escoamento subsônico estrangulado, o aumento da razão T_o^*/T_o implica em uma redução do Mach na entrada.	127
Figura 9.11–Para escoamento supersônico estrangulado, apenas o choque normal não irá permitir a adição de calor desejada. O choque levará o escoamento para regime subsônico (2) e ocorrerá uma redução do valor de Mach (3).	128
Figura 10.1–No regime subsônico a função de Fanno diminui com aumento de Mach, assim, para $M_2 > M_1 \rightarrow F(M_2) < F(M_1)$, o que implica que o atrito acelera o escoamento subsônico; no regime supersônico, para $M_2 > M_1$ temos $F(M_2) > F(M_1)$ indicando que o atrito deve desacelerar o escoamento no regime supersônico.	138
Figura 10.2–Razão entre propriedades sônica e de entrada em função do número de Mach para o ar ($k=1,4$)	142
Figura 10.3–Diagrama de Fanno (ds vs h). Em x temos o valor da variação da entropia, calculada por $ds = c_P \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - R \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right)$ e no eixo y o valor logarítmico da razão de entalpia ou temperatura $\frac{h_2}{h_1} = \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{2+(k-1)M_1^2}{2+(k-1)M_2^2} \right)$	144
Figura A.1 – Razão entre propriedades de estagnação e estáticas em função do número de Mach para o ar ($k=1,4$)	146

Lista de tabelas

Tabela B.1 – Tabela para escoamento Isoentrópico. $k = 1,4$	151
Tabela B.2 – Tabela para Choque Normal. $k = 1,4$	157
Tabela B.3 – Tabela para Escoamento unidimensional com troca de calor. $k = 1,4$	161
Tabela B.4 – Tabela para Escoamento unidimensional com atrito. $k = 1,4$	166

Sumário

Apresentação	15
1 Introdução aos Escoamentos Compressíveis	17
1.1 Conceitos	17
1.1.1 Escoamentos Compressíveis ou Fluidos Compressíveis?	20
1.2 Quão comum é o escoamento compressível?	21
1.3 Caracterização de escoamento compressível	21
1.4 Escoamentos viscosos e não viscosos (invíscidos)	37
2 Termodinâmica	39
2.1 Termodinâmica e energia	39
2.1.1 Nota sobre a representação da energia	40
2.2 Sistema	40
2.3 Ponto de vista macroscópico	43
2.4 Ponto de vista microscópico	43
2.5 Macroscópico vs Microscópico	44
2.5.1 Hipótese do contínuo	44
2.6 Caracterização do sistema	45
2.6.1 Estado do sistema	45
2.6.2 Propriedades do sistema	45
2.6.3 Processo e Ciclo	46
2.6.4 Igualdade de Temperatura	46
2.6.5 Temperatura	46
2.7 A lei zero da termodinâmica	46
2.7.1 Processo à mesma temperatura	47
2.8 Trabalho e Calor	47
2.8.1 Trabalho	47
2.8.2 Calor e energia	48
2.9 A primeira Lei da termodinâmica para um sistema fechado: energia, calor e trabalho	48
2.9.1 Energia e calor	49
2.9.2 Energia e trabalho	49
2.9.3 A primeira lei	50
2.9.3.1 Trabalho de Compressão e Expansão a pressão constante	51
2.9.3.2 Trabalho de compressão a volume constante	51
2.9.4 Primeira lei para um ciclo	52
2.9.5 Processo adiabático	52
2.10 Primeira lei da Termodinâmica para um sistema aberto	52
2.10.1 Aplicação da 1ª Lei da Termodinâmica para uma turbina	54
2.10.2 Aplicação da 1ª Lei da Termodinâmica para uma bomba ou ventilador	54
2.10.3 Aplicação da 1ª Lei da Termodinâmica: equação de Bernoulli	54
2.11 Calores específicos e a Primeira lei	55
2.12 Motores térmicos e a Segunda Lei da Termodinâmica	57
2.12.1 Eficiência dos motores térmicos	58
2.12.1.1 Movimento perpétuo de segundo tipo	58
2.12.2 A escala de temperatura absoluta	59

2.12.3	Reversibilidade	60
2.12.4	Irreversibilidade	60
2.12.5	Máxima eficiência dos motores térmicos: o motor térmico de Carnot	60
2.12.6	Inegualdade de Clausius	61
2.13	A Entropia	62
2.13.1	Cálculo da entropia	63
3	Gás perfeito	65
3.1	Formas alternativas da equação dos gases ideais	65
3.2	Precisão em se assumir gás ideal	66
3.3	Calores específicos para gases perfeitos	68
3.4	Cálculo da entropia para gases perfeitos termicamente	69
3.5	Equações Isoentrópicas para gases ideais	71
4	Equações	77
5	A velocidade do som e o cone de Mach	79
5.1	A velocidade do som	79
5.1.1	O número de Mach	82
5.2	O cone de Mach	84
6	Escoamento Isoentrópico Unidimensional	87
6.1	Fundamentos de escoamento compressível unidimensional	87
6.2	Condição de estagnação	88
6.3	As condições características	91
7	Escoamento compressível com mudança de área	93
7.1	O bocal de Laval	97
7.1.1	Pontos sônicos possíveis	97
7.1.2	Projeto de bocal	99
8	Choque Normal	103
8.1	Formas alternativas da equação da energia	105
8.2	A relação de Prandtl	106
8.3	Propriedades após o choque em função do número de Mach	108
8.3.1	Número de Mach após o choque	108
8.3.2	Razão entre massa específicas após e antes o choque normal	108
8.3.3	Razão entre as pressões após e antes do choque normal	109
8.3.4	Razão entre as temperaturas após e antes do choque normal	110
8.3.5	Entropia	111
8.3.6	Variação das propriedades de estagnação através do choque normal	112
9	Escoamento de Rayleigh	115
9.1	Equações em função da condição sônica	120
9.2	O diagrama entalpia-entropia	126
9.3	Escoamento estrangulado	126
10	Escoamento de Fanno	131
10.1	Variação da velocidade	134
10.2	Variação da massa específica	134
10.3	Variação da temperatura	134
10.4	Variação da pressão	135
10.5	Variação de Mach	135
10.6	Equação para as propriedades na saída em função das propriedades na entrada	136
10.6.1	Mach	136
10.6.2	Temperatura	138
10.6.3	Pressão	139
10.6.4	Pressão de estagnação	139
10.6.5	Massa específica	140
10.7	Condição sônica em escoamento de Fanno	141
10.8	Diagrama de Fanno	144
A	Equações	145

A.1	Propriedades para ar	145
A.2	Equações para gases ideais	145
A.2.1	Velocidade do som	145
A.3	Escoamento Unidimensional em regime permanente	145
A.4	Equações para escoamento isoentrópico	146
A.5	Equações para Choque Normal	147
A.6	Equações para Escoamento de Rayleigh	148
A.7	Equações para Escoamento de Fanno	149
B	Tabelas	151
	Referências	171

Apresentação

- Esta é uma obra em desenvolvimento. Grande esforço é colocado para garantir que o texto e os cálculos estejam corretos. Qualquer erro encontrado, por favor nos comunique.
- Procure sempre utilizar a versão mais recente do documento, que está disponível em:

[<www.cienciastermicas.com>](http://www.cienciastermicas.com)

- Essa versão foi atualizada em: 10 de agosto de 2020

Introdução aos Escoamentos Compressíveis

A aviação foi a grande propulsora no avanço da dinâmica dos fluidos e particularmente no estudo de escoamentos compressíveis. A velocidade dos aviões até o início da segunda guerra mundial era inferior a $1/3$ da velocidade do som. Dessa forma, a literatura sobre aerodinâmica tratava de escoamentos incompressíveis. Com o surgimento de aeronaves com velocidades próximas à do som, os efeitos da compressibilidade na aerodinâmica de aeronaves passou a ser importante. Os fundamentos de escoamento compressível são aplicados a um grande espectro de problemas de engenharia atualmente.

1.1 Conceitos

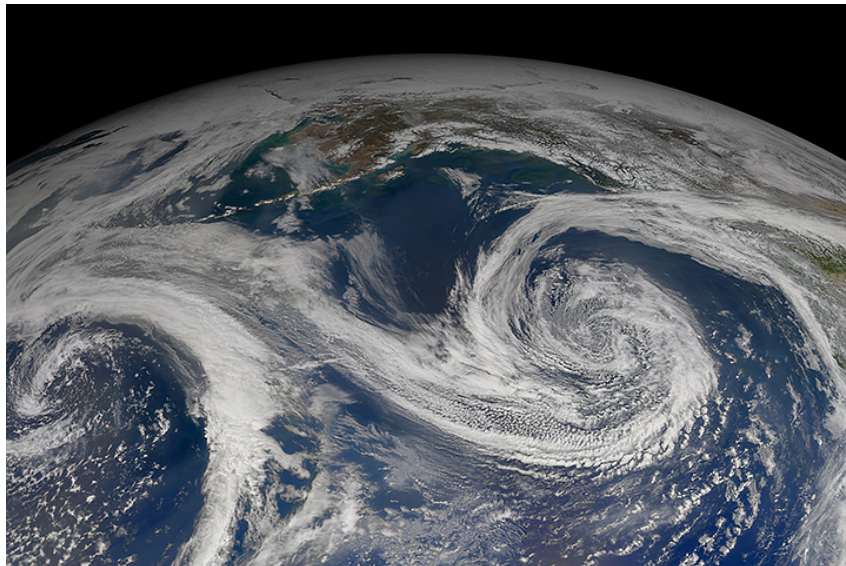


Figura 1.1 – Escoamento na atmosfera terrestre. Fonte: <<https://earthobservatory.nasa.gov/images/83754/springtime-in-the-gulf-of-alaska>>

- Escoamento

substantivo masculino

1. ato de escoar; escoadura, escoação.

2. plano inclinado por onde as águas escoam.
3. modo de fluir de uma corrente.

Origin ETIM escoar + -mento

- Fluido

Toda substância se encontra em uma das fases da matéria: sólida, líquida ou gasosa. Chamamos de fluido à substância nas fases líquida ou gasosa. As equações que governam seus movimentos possuem muitas semelhanças.

- O que é um fluido? Qual a diferença para um sólido?
- Como diferenciar líquidos de gases?

Um fluido não resiste à tensão de cisalhamento. Ou seja, sempre que lhe é aplicada uma tensão cisalhante, ele escoar, em menor ou maior grau, continuamente até que a tensão aplicada seja interrompida. Os sólidos são capazes de resistir à tensões sem escoar.

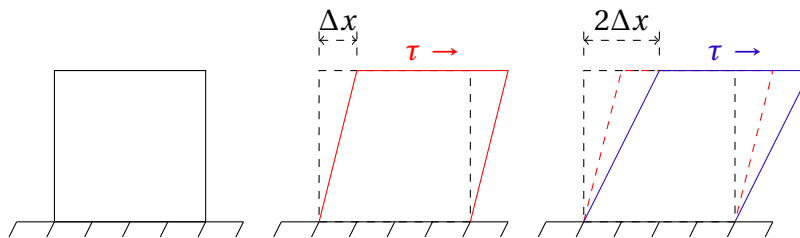


Figura 1.2 – Um fluido deforma continuamente quando sujeito à tensão de cisalhamento.

A resistência do fluido à tensão de cisalhamento é representada pela viscosidade μ . Fluidos Newtonianos possuem relação linear entre a taxa de deformação e a tensão de cisalhamento:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.1)$$

Fluidos não-newtonianos são representados, de maneira genérica, por:

$$\tau = k \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \quad (1.2)$$

ou através da viscosidade aparente η :

$$\tau = \eta \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.3)$$

Os fluidos não-newtonianos podem ser classificados em:

- Pseudoplásticos: viscosidade aparente diminui com aumento da taxa de deformação;
- Dilatantes: viscosidade aparente aumenta com aumento da taxa de deformação;
- Plástico de Bingham: se comporta como sólido até determinado limite e após possui relação linear entre tensão cisalhante e taxa de deformação;
- Tixotrópico: a viscosidade aparente reduz com o tempo;
- Reopético: viscosidade aparente aumenta com o tempo;

- Viscoelásticos: retornam em parte à sua forma original.



Figura 1.3 – Viscosidade do fluido. Fonte: <<https://maxi-miser.com/what-is-viscosity/>>

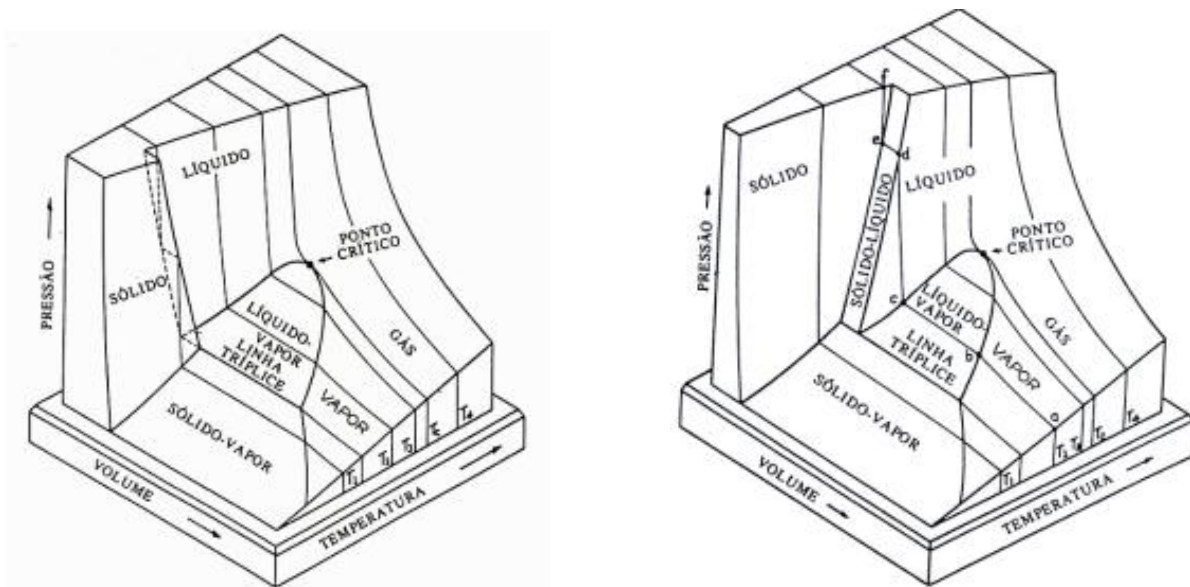
Para diferenciar líquidos de gases, a idéia mais comum que surge é a de que, a grosso modo, o gás é capaz de preencher todo o recipiente em que se encontra, enquanto que o líquido forma uma interface, chamada de menisco. Nem sempre essa definição é suficiente. Imaginemos um recipiente fechado, com paredes rígidas, cheio de líquido. Nesta situação, não se observa um menisco e, além disso, é possível adicionar calor ao recipiente, de modo à provocar a mudança da fase líquida para a gasosa, sem que seja observada uma interface.

Uma forma de diferenciar estes fluidos está justamente na variação de seu volume com o aumento da pressão aplicada. Assim, para um dado aumento na pressão, temos:

- Gases: grande variação no volume quando submetido à pressão
- Líquidos: pequena variação no volume quando submetido à pressão.

Para quase todos os escoamentos de líquidos a variação do volume é tão pequena que pode ser desprezada. Mas porque podemos fazer tal afirmação? Como podemos saber o comportamento da matéria, para avaliar a variação de seu volume?

Para qualquer substância, podemos traçar um gráfico Pressão-Volume-Temperatura, conhecido como superfície P-V-T. Os estados da matéria podem ser identificados na superfície desse gráfico. Há substâncias que se contraem ao se solidificar, conforme Fig.1.4a, e outras que expandem, conforme Fig.1.4b, mas na região de líquido, pode-se observar que um aumento significativo da pressão leva a uma redução de volume desprezível.



(a) Superfície P-v-T de uma substância que se contrai ao solidificar.

(b) Superfície P-v-T de uma substância que se expande ao solidificar.

Figura 1.4 – Superfície pressão - volume - temperatura

O volume específico (v) é definido como o volume (V) por unidade de massa (m):

$$v = \frac{V}{m} \quad (1.4)$$

Enquanto a massa específica (ρ) é o inverso do volume específico:

$$\rho = \frac{1}{v} \quad (1.5)$$

Líquidos são considerados fluidos incompressíveis, pois possuem variação de volume específico desprezível (e de massa específica) enquanto gases são considerados fluidos compressíveis, pois a variação de seu volume específico (e de sua massa específica) é considerável quando sujeitos à aplicação de uma pressão.

1.1.1 Escoamentos Compressíveis ou Fluidos Compressíveis?

É importante que tenhamos a compreensão do que se trata o estudo de escoamentos compressíveis. Desta forma, podemos nos questionar, iremos estudar:

- Escoamento de fluidos compressíveis?

OU

- Escoamentos compressíveis?

Escoamento de *Fluidos Compressíveis* e *Escoamentos Compressíveis* não são, necessariamente, a mesma coisa.

O interesse está no estudo do *regime de escoamento*. Quando nos referimos a escoamentos compressíveis, portanto, estamos nos referindo aos escoamentos em que a compressibilidade do fluido é levada em consideração.

Assim, o interesse é em:

- Escoamento em que há variação significativa ou notável da massa específica do fluido.

Para diversas situações práticas, a variação do volume dos gases é relativamente pequena, podendo também ser desprezada. Essa situação depende do regime do escoamento. Escoamentos com velocidade muito menor do que a velocidade do som são considerados escoamentos a baixas velocidades. A variação do volume específico desses escoamentos também é muito pequena, podendo ser desprezada. Aos escoamentos que tem variação de volume específico desprezível, chamamos de escoamentos incompressíveis. Quando a variação da velocidade se torna comparável à velocidade do som, a variação do volume dos gases passa a ser significativa. Nesses casos, o escoamento se torna compressível.

Mas por que um aumento na velocidade do escoamento leva à compressibilidade? Basicamente, existe uma maior quantidade de momento. Quando o fluido encontra um objeto, é necessária elevada pressão para desacelerá-lo à velocidade nula. Quanto maior a pressão, mais o fluido será comprimido.

Observem que o escoamento de gases, que são fluidos compressíveis, pode ser tratado como incompressível.

Escoamentos incompressíveis, portanto, envolvem o estudo de escoamento de fluidos incompressíveis e de escoamento de fluidos compressíveis, desde que a variação do volume específico seja desprezível.

Na vida real, todo escoamento, de todo fluido, é compressível numa extensão maior ou menor. Assim:

- Escoamento incompressível é uma idealização;
- Para escoamentos de líquidos a variação na massa específica é tão pequena que pode-se assumir massa específica constante com acurácia razoável;
- Para escoamentos de gases, deve-se avaliar até qual variação na massa específica podemos considerar o fluido como "incompressível", ou seja, até quando os efeitos da compressibilidade podem ser desprezados. É uma questão de julgamento.

1.2 Quão comum é o escoamento compressível?

Para líquidos, é muito raro. A aplicação de uma pressão de 20[MPa] leva à uma variação da massa específica menor do que 1% na água. Líquidos, portanto, são tratados como fluidos incompressíveis e seu escoamento como incompressível.

Para gases é muito comum. Se ar é armazenado em um recipiente com o dobro da pressão atmosférica, essa condição é suficiente para acelerá-lo à velocidade do som quando é liberado para a atmosfera, o que ocasiona substancial variação de seu volume específico (e de sua massa específica).

Essas afirmações são facilmente observadas em nosso cotidiano. Um sistema pistão-cilindro cheio de água sofrerá pouca variação de volume quando comprimido, enquanto que o mesmo sistema cheio de ar irá ser comprimido facilmente.

1.3 Caracterização de escoamento compressível

Um indicador útil para caracterizar o regime de escoamento é o número de Mach, calculado pela razão entre a velocidade do fluido e a velocidade do som no meio:

$$M = \frac{V}{c} \quad (1.6)$$

sendo:

- M : número de Mach local. É a razão entre a velocidade no ponto e a velocidade do som para aquela condição. Varia de ponto a ponto no escoamento.

- V : velocidade da corrente livre. É a velocidade do escoamento longe do corpo.
- c : velocidade do som na corrente livre. Também é uma propriedade termodinâmica.

Com base no número de Mach, os seguintes regimes são caracterizados:

1. $M < 0,3$: escoamento subsônico incompressível.

Para essa condição, mesmo escoamento de gases podem ser tratados como incompressíveis. As propriedades variam continuamente no escoamento, as linhas de corrente são suaves, retas e paralelas, e começam a se defletir a montante (antes) do corpo.

Para aplicações em aerodinâmica, o regime subsônico é identificado como possuindo $M_{\infty} < 0,8$

Exemplo são as Esteiras de Von Karman. (Figura: escoamento em volta das ilhas de Juan Fernandez)

2. $0,3 < M < 0,8$: escoamento subsônico compressível

Escoamentos de gases nessas condições levam a mudanças na massa específica consideráveis, mas não há a formação de ondas de choque.

Ex. Bugatti Veyron, a 431Km/h ($M \approx 0,35$): a estagnação (desaceleração) do escoamento na frente do veículo leva a um aumento da massa específica e da pressão.

3. $0,8 < M < 1,0$: escoamento transônico

O escoamento é subsônico, mas quando atravessa uma superfície aerodinâmica (ex. aerofólio) é acelerado em determinadas regiões à velocidades maiores do que a do som, resultando em regiões localmente supersônicas. Na maioria dos casos essa região de escoamento local supersônico termina com uma onda de choque através do qual há descontinuidade e mudanças significativas nas propriedades do escoamento.

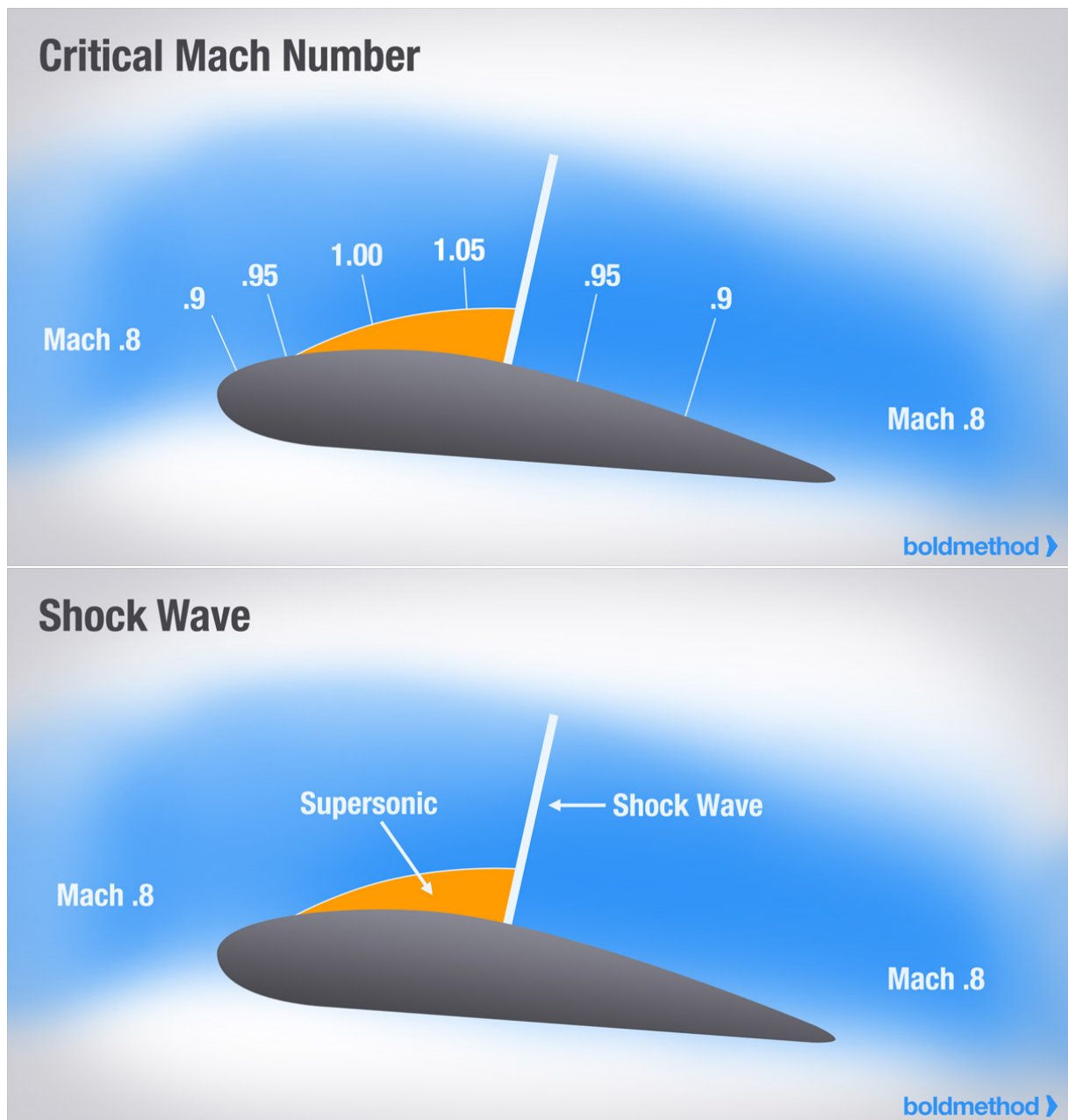


Figura 1.5 – No escoamento transônico, o objeto pode se mover a velocidades menores do que a do som. Entretanto, devido ao perfil aerodinâmico, o escoamento pode ser acelerado em determinadas partes, atingindo velocidades supersônicas. Observe na figura que o escoamento está a $M = 0,8$ mas é acelerado ao longo da superfície superior. fonte: <<http://www.boldmethod.com/learn-to-fly/aerodynamics/wing-sweep/>>



Figura 1.6 – A onda de choque ocorre devido à aceleração do escoamento ao longo da superfície aerodinâmica. fonte: a) <<https://www.christography.com/aviation>>

Com Mach próximo de 1, o perfil de choque se move para o final do aerofólio e uma segunda onda de choque aparece à montante do aerofólio. Na frente dessa onda de cho-

que, as linhas de corrente são retas e paralelas, com um número de Mach supersônico uniforme. Ao passar pela região de choque quase normal ao escoamento, o escoamento se torna subsônico, mas um extenso escoamento supersônico se forma novamente conforme o escoamento se expande pela superfície do aerofólio.

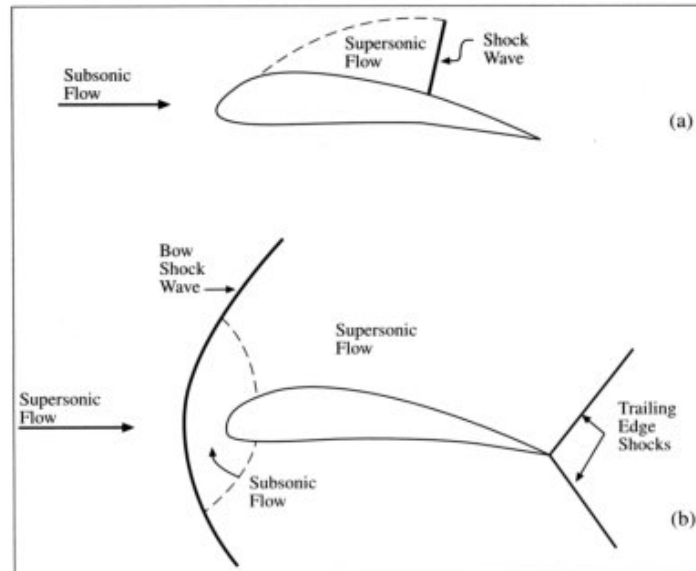


Figura 1.7 – fonte: <<https://history.nasa.gov/SP-4219/Chapter3.html>>

Há, portanto, uma região mista de escoamento supersônico e subsônico. Para efeitos práticos, a região transônica é considerada para $0.8 \leq M_{\infty} \leq 1.2$.

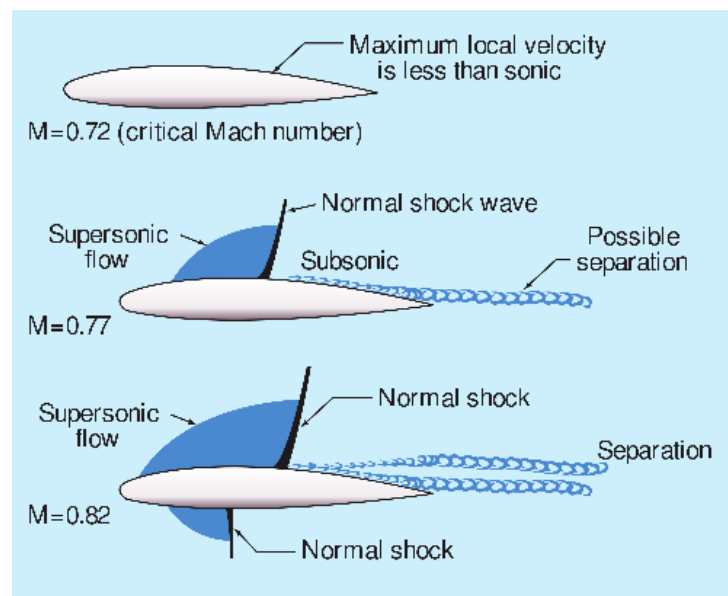


Figura 1.8 – Choque pode ocorrer em escoamento transônico, conforme o fluido é acelerado pela superfície. Esse choque se move para a cauda do aerofólio com o aumento da velocidade. Fonte: <<https://teamuv.org/tag/hypersonic/>>

4. $M > 1$: escoamento supersônico

A aeronave Bell X-1, pilotada pelo capitão da força aérea dos Estados Unidos Charles E. "Chuck" Yeager, atingiu em 14/10/1947 a velocidade de $1127 [Km/h]$, o equivalente a

$M = 1,06$, a 13000m de altitude sobre o deserto de Mohave. Em 26/03/1948 Yager atingiu a velocidade de Mach 1.45. Foi a primeira aeronave a realizar um voo supersônico, mostrando que não há uma barreira sônica que impede tais vãos.



Figura 1.9 – Aeronave Bell X-1-1 em voo. Três aeronaves foram inicialmente construídas pela Bell Aircraft Corporation para uma cooperação entre a National Advisory Committee for Aeronautics (NACA) e Força aérea dos Estados Unidos, iniciando a série de aeronaves experimentais X. Apesar de projetadas para decolagem convencional, durante os testes eram lançadas no ar por bombardeiros modificados Boeing B-29 ou B-50. Fonte: <<https://airandspace.si.edu/collection-objects/bell-x-1-glamorous-glennis-nasm/bell-x-1-glamorous-glennis>>



Figura 1.10 – Construía em alumínio com tanques em aço, seus contornos foram inspirados numa bala calibre 0.5. Fonte: <<https://airandspace.si.edu/collection-objects/bell-x-1-glamorous-glennis-nasm/bell-x-1-glamorous-glennis>>

A aeronave comercial Concorde, na década de 1960, voava a $2000[\text{Km/h}]$ ou $M = 2.0$. Aeronaves militares tais como Grumman F14 atingem $2500[\text{Km/h}]$ ($M = 2,5$), interceptadores militares tais como Mig 25 $3000[\text{Km/h}]$ ($M = 3$), e a SR-71 atinge Mach 3.5.



Figura 1.11 – Aeronave SR-71 atingia Mach 3.5. Fonte: <<https://www.nasa.gov/centers/dryden/multimedia/imagegallery/SR-71/>>

Em escoamentos supersônicos ocorre a formação de ondas de choque, resultante da desaceleração do escoamento. Essas ondas podem ser em formato de arco, em corpos rombudos, ou oblíquas.

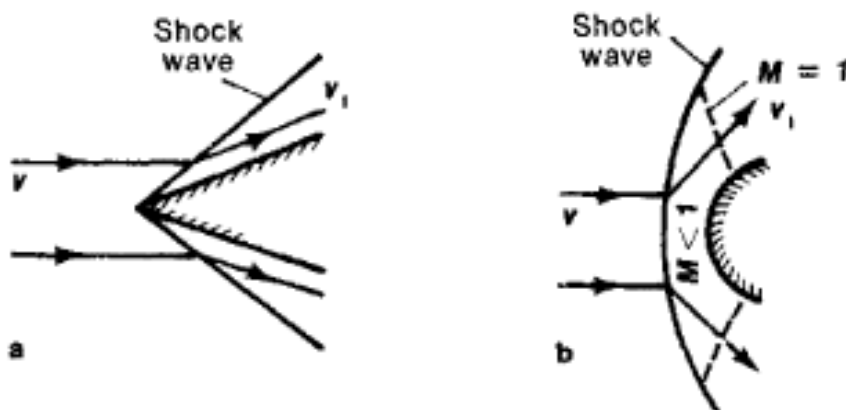


Figura 1.12 – a) Onda de choque oblíqua; b) Onda de choque normal. fonte: McGraw-Hill Concise Encyclopedia of Physics. © 2002 by The McGraw-Hill Companies, Inc.

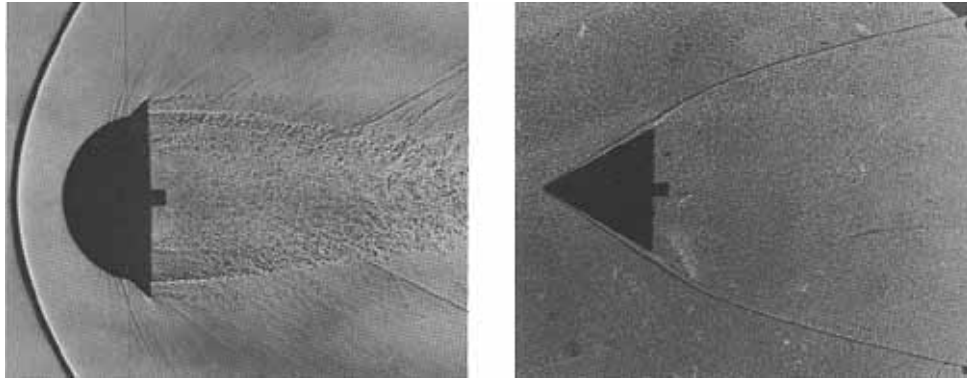


Figura 1.13 – Choques Normal e Oblíquo. Fonte: <<https://www.hq.nasa.gov/office/pao/History/SP-440/ch6-2.htm>>

A onda de choque é considerada normal (onda em arco) próxima à região central do corpo rombudo. O ângulo entre a frente de onda e o vetor velocidade é próximo de 90 graus.

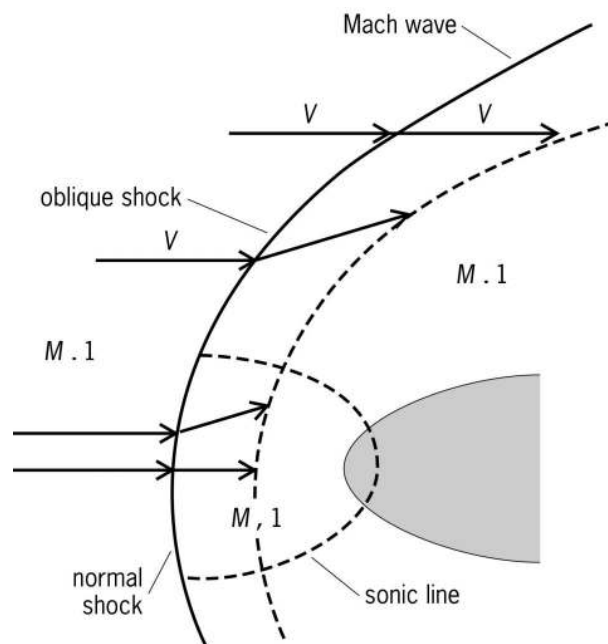


Figura 1.14 – Onda de choque formada devido ao escoamento sobre um corpo rombudo viajando à velocidade supersônica. Na região central o choque pode ser considerado normal, mas à medida que se afasta da linha de centro o choque é oblíquo. fonte: McGraw-Hill Concise Encyclopedia of Physics. © 2002 by The McGraw-Hill Companies, Inc.

Uma bala viaja a aproximadamente $510[m/s]$, o equivalente a $M = 1,5$.

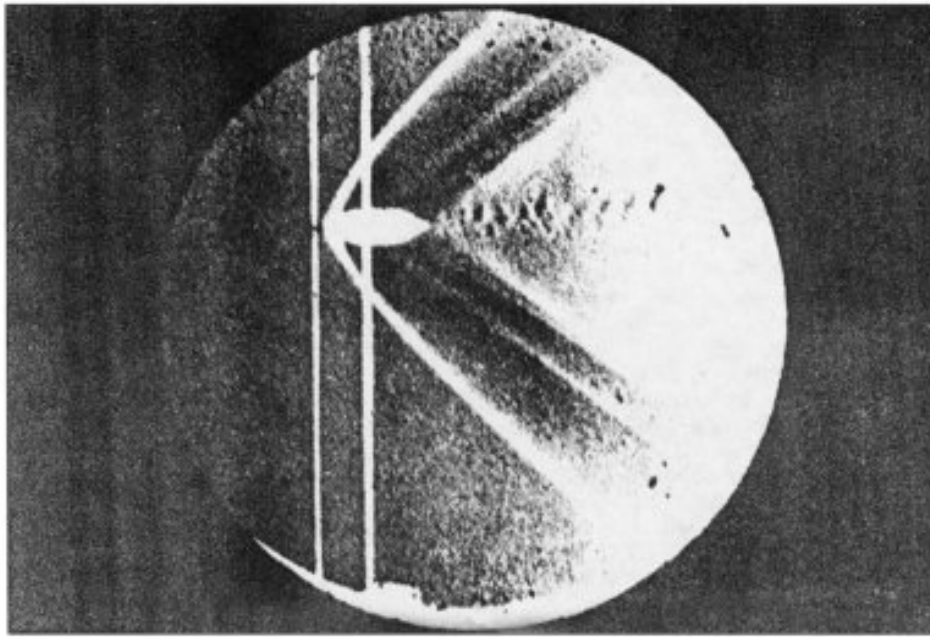


Figura 1.15 – Fotografia de uma bala em voo supersônico, publicada por Ernst Mach em 1887.
fonte: <<https://history.nasa.gov/SP-4219/Chapter3.html>>

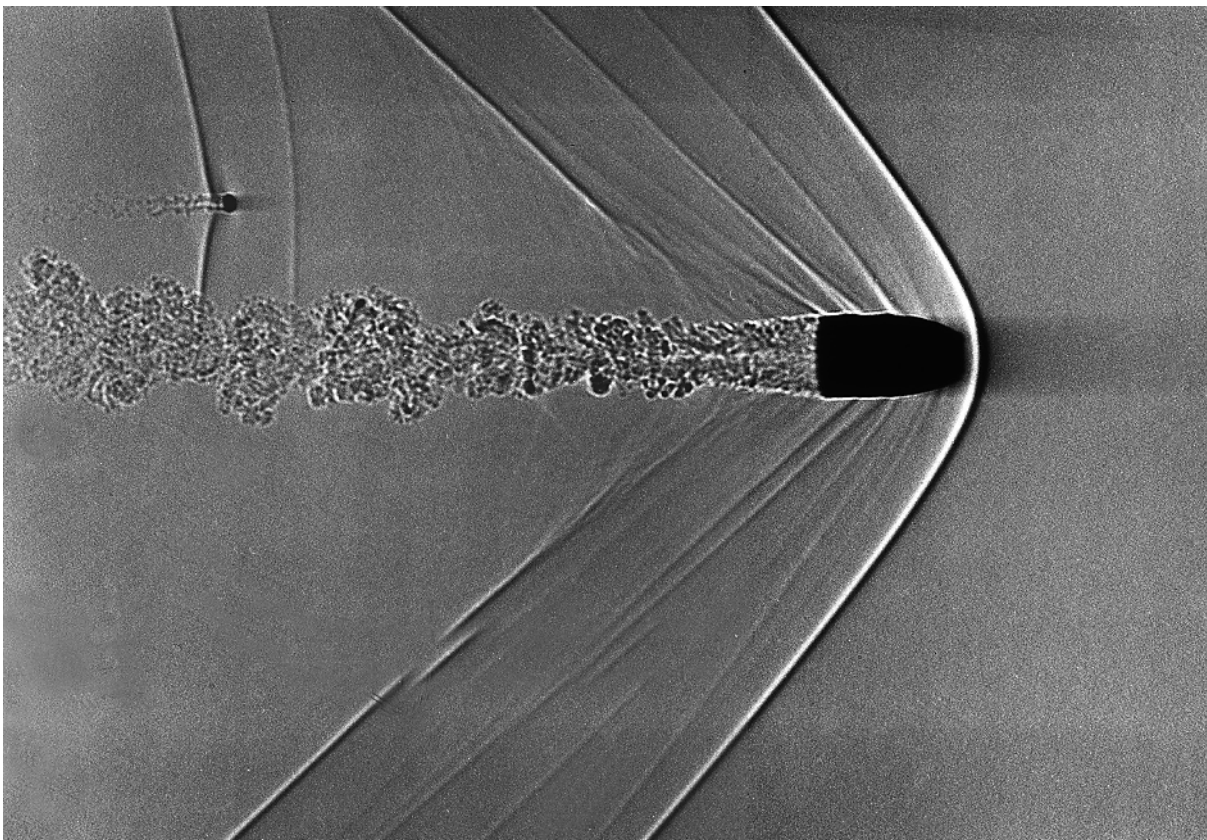


Figura 1.16 – Uma bala em voo com $M = 1,5$, capturada por um instrumento denominado shadowgraph. fonte: <https://www.nasa.gov/mission_pages/galex/20070815/>



Figura 1.17 – Uma imagem da vizinhança da estrela 0B HD77581 e (não visível opticamente) Vela X-1, obtida com o telescópio Dinamarquês em La Silla. Claramente mostra a presença de uma onda em arco, confirmando que o sistema se encontra em movimento. É uma das ondas em arco em formato parabólico mais perfeitas já observadas em volta de uma estrela em movimento 0B. Fonte: <<https://www.eso.org/public/brazil/images/eso9702a/?lang>>

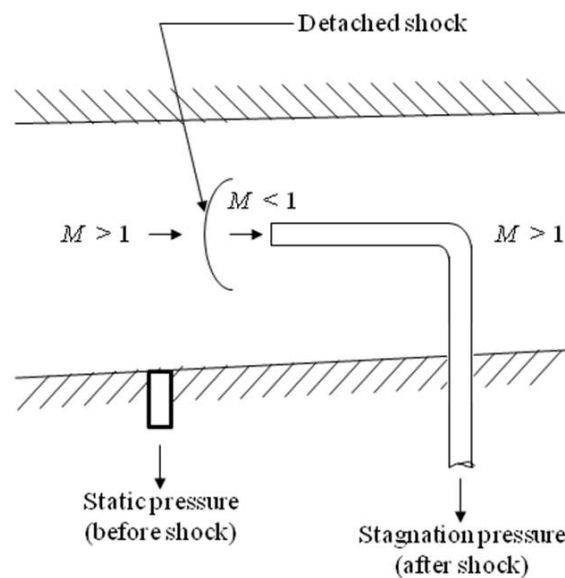


Figura 1.18 – A onda de choque também pode ocorrer quando se insere um medidor, como o tubo de Pitot, no escoamento supersônico. O efeito da onda de choque deve ser levado em consideração para se medir adequadamente a velocidade do escoamento. fonte: <<http://nptel.ac.in/courses/101103004/module7/lec6/4.html>>

Fora da região central e em escoamentos sobre corpos "pontudos" a onda de choque será oblíqua.

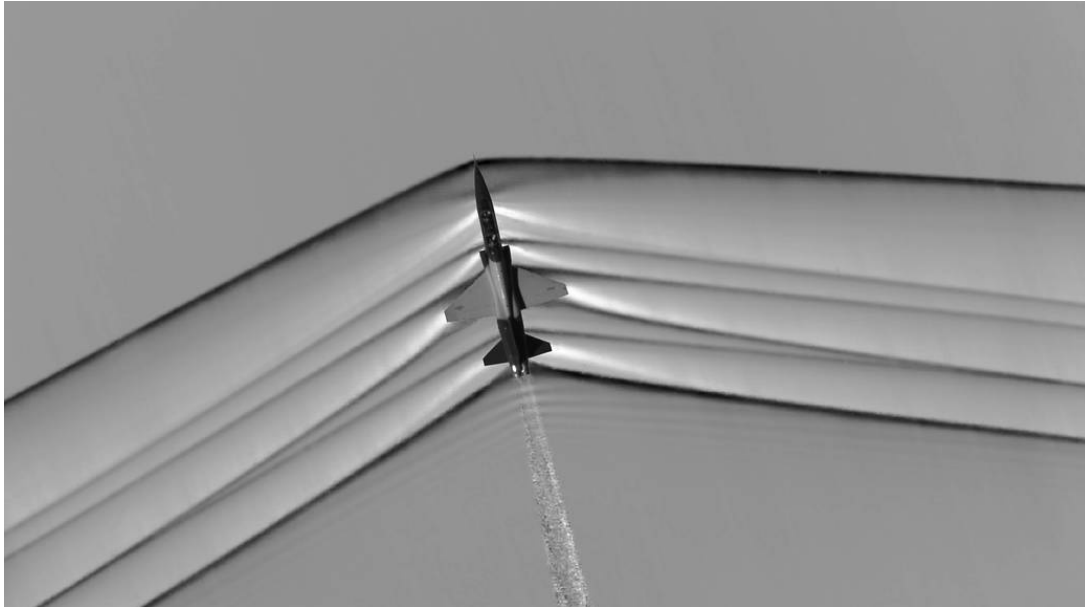


Figura 1.19 – Choque Oblíquo. Fonte: <<https://www.nasa.gov/image-feature/stark-beauty-of-supersonic-shock-waves>>

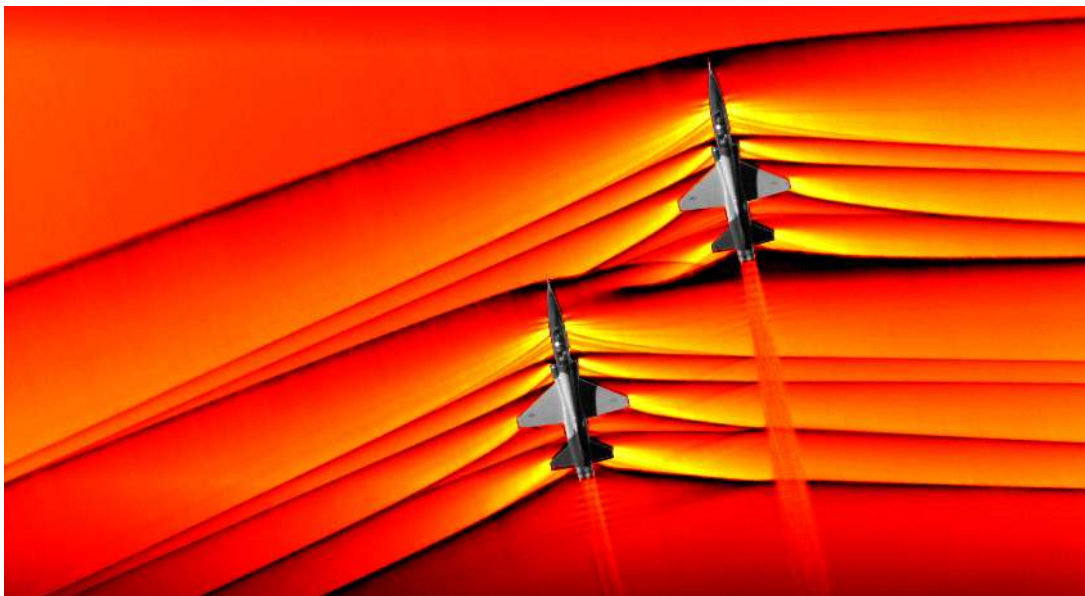


Figura 1.20 – Interação de ondas de choque em aeronaves T-38, voando em velocidade supersônica em formação, aproximadamente 30 pés de distância uma da outra, utilizando a técnica fotográfica schlieren. As ondas são tipicamente ouvidas em solo como o boom sônico Fonte: <<https://www.flickr.com/photos/nasacommons/33433414158>>

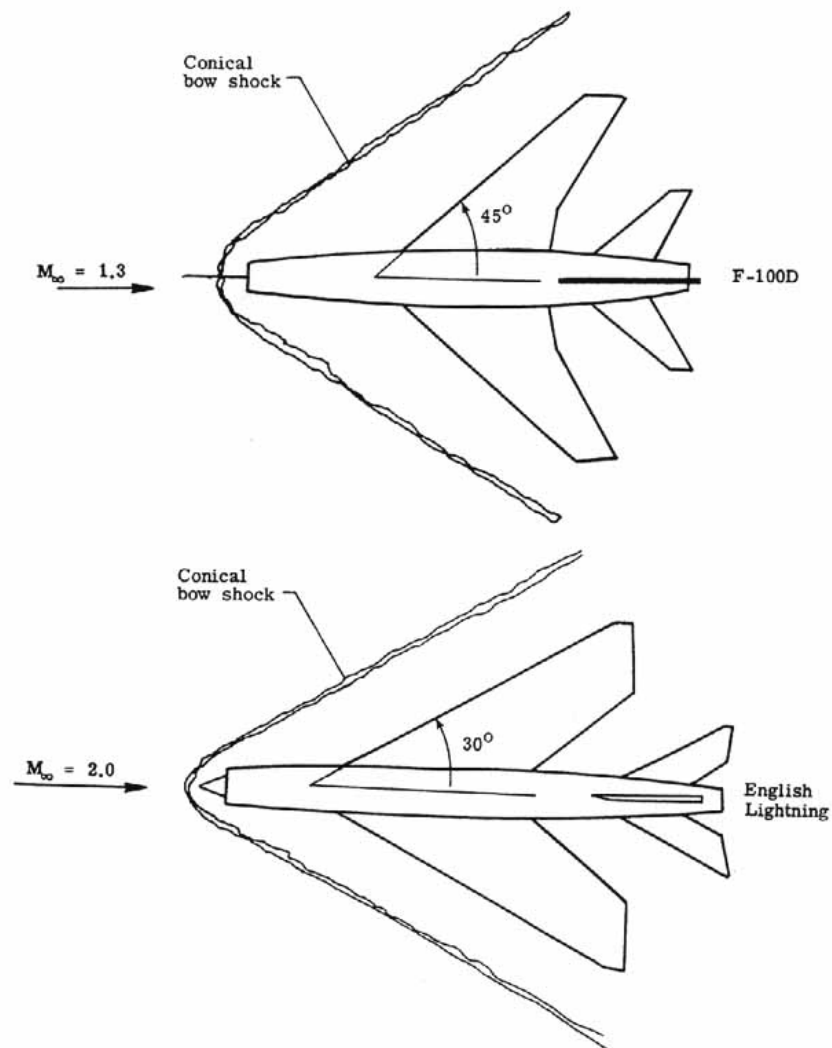


Figura 1.21 – Conforme o escoamento acelera a onda se aproxima da fuselagem. fonte: <<https://history.nasa.gov/SP-367/f99.htm>>

À medida que o escoamento é acelerado, a onda oblíqua se aproxima do corpo. Essa região sofre grande variação das propriedades e atinge elevadas temperaturas.

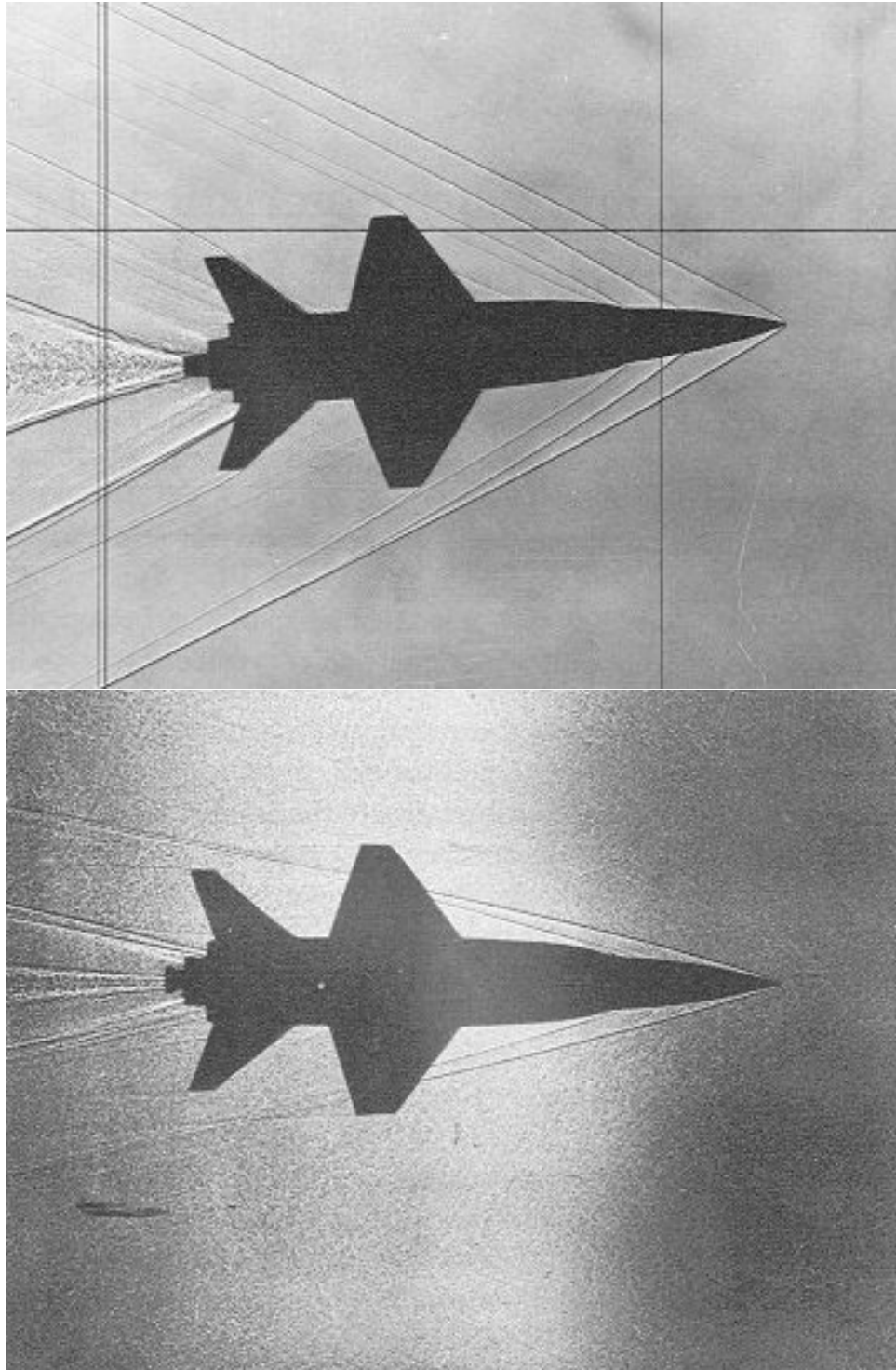


Figura 1.22 – Modelo x-15 em túnel de vento a Mach 3.5 (acima) e Mach 6 (abaixo), detalhando o padrão da onda de choque formado. Fonte: <<https://history.nasa.gov/SP-60/ch-5.html>>

O estudo das características de choques normais e oblíquos levou ao desenvolvimento da cápsula de reentrada do projeto Mercury.

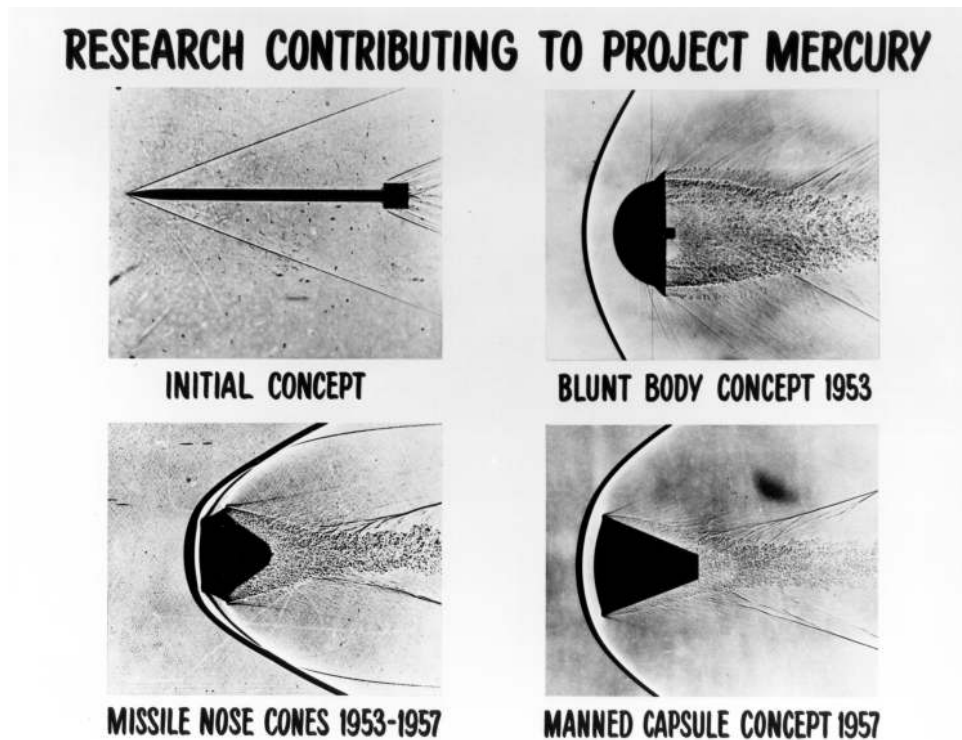


Figura 1.23 – Essas quatro imagens por (shadowgraph) representam conceitos iniciais para veículos de reentrada. Shadowgraph é um processo que torna visível as perturbações que ocorrem no escoamento a altas velocidades, na qual a luz passando pelo escoamento é refratada pelos gradientes de massa específica no fluido, resultando em áreas claras e escuras numa tela posicionada atrás do fluido. H. Julian Allen foi pioneiro na teoria de corpos rombudos, que tornaram possível o projeto de escudos térmicos utilizados nas cápsulas espaciais Mercury, Gemini e Apollo, possibilitando que os astronautas sobrevivessem à reentrada na atmosfera terrestre. Um corpo rombudo produz uma onda destacada, que protege o veículo de aquecimentos excessivos. Assim, um veículo de formato rombudo permanece mais frio do que um pontudo, com menor arrasto. Fonte: <<https://www.flickr.com/photos/nasacommons/16374997425>>

5. $M > 5$: escoamento hipersônico

Neste regime ocorre um grande aumento da temperatura, pressão e massa específica através da onda de choque, que se torna oblíqua, se movendo para perto da superfície com o aumento de Mach.

para $M_\infty > 5$ o escoamento entre o choque e o corpo se torna extremamente quente, a ponto de dissociar ou até ionizar as moléculas de gás. Assim, há escoamentos a altas temperaturas e quimicamente reagentes, que introduzem uma nova complexidade.

A transição entre supersônico e hipersônico depende do formato do corpo e da massa específica a montante.

Para essa condição as ondas de choque são mais fortes, levando a altas temperaturas dos gases. Moléculas individuais vibram a alta intensidade, levando à mudanças nas propriedades dos gases.

Reações químicas são importantes, assim como a radiação.

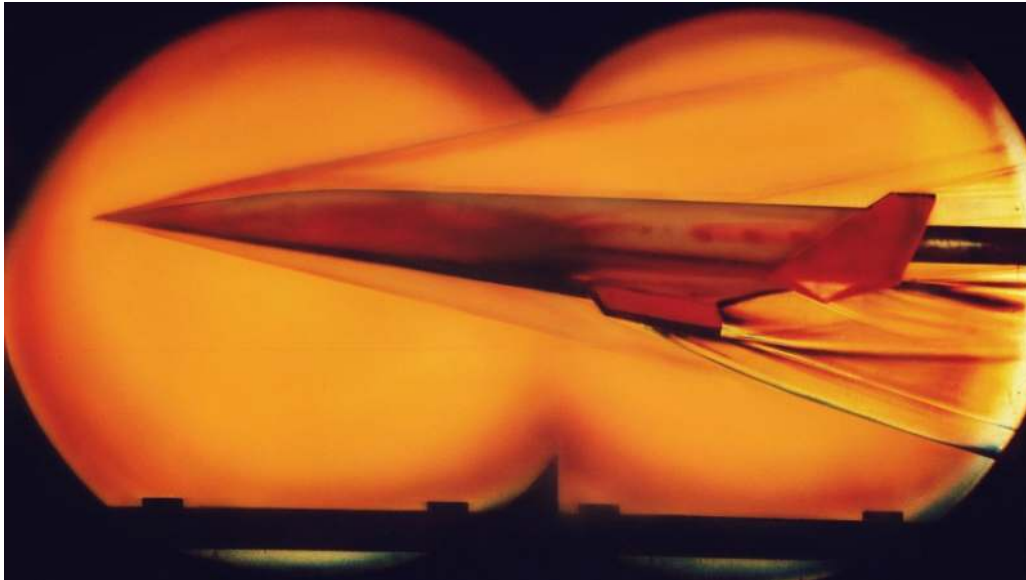


Figura 1.24 – Escoamento hipersônico. Fonte: <<https://teamuv.org/tag/hypersonic/>>



Figura 1.25 – A terceira aeronave de pesquisa hipersônica X-43A, com um foguete Pegasus, levada para lançamento por um B-52B do centro de pesquisa Dryden Flight Research Center em 16 de Novembro de 2004. A aeronave X-43A atingiu a velocidade desejada de Mach 10. Fonte: <<https://www.nasa.gov/centers/dryden/multimedia/imagegallery/X-43A/EC04-0325-23.html>>

1.4 Escoamentos viscosos e não viscosos (invíscidos)

Escoamentos viscosos são aqueles para os quais os efeitos da viscosidade, condutividade térmica e difusão de massa (efeitos dissipativos) são importantes. Nestes escoamentos, ocorre mudança na entropia do escoamento, sendo importante em regiões de altos gradientes de velocidade, temperatura e composição química, tais como na camada limite e em dutos longos.

Escoamentos invíscidos são aqueles nos quais efeitos da viscosidade, condutividade térmica e difusão são ignorados. Estas considerações podem parecer altamente restritivas a princípio, mas várias aplicações não envolvem escoamentos com altos gradientes, tais como escoamento sobre grandes seções de asas e corpos fora da camada limite, em túneis de vento e em bocais de foguetes, em compressores e pás de turbinas de aviões a jato.

CAPÍTULO 2

Termodinâmica

Ao final deste capítulo o aluno deve apresentar domínio das definições fundamentais da termodinâmica, a saber:

- Definição de sistema fechado e aberto
- definição de fluido
- conceito de contínuo
- definição de propriedade contínua num ponto
- Primeira Lei da termodinâmica
- Segunda Lei da termodinâmica

2.1 Termodinâmica e energia

A Termodinâmica é a Ciência que estuda a energia (E) e suas transformações.

Mas o que é ENERGIA?

O conceito mais amplo é:

Energia = Capacidade de se produzir um efeito.

Portanto, a Termodinâmica é a Ciência que estuda a capacidade de um sistema de produzir um efeito.

A energia é representada pela letra:

- *E*: maiúscula, para quantidade extensiva, quando considera toda a massa do sistema
- *e*: minúscula, para quantidade intensiva, ou seja, por unidade de massa

Energia é uma propriedade termodinâmica. Toda propriedade pode ser representada na sua forma extensiva, considerando sua massa total, ou intensiva, por unidade de massa. Por exemplo:

- *E*: energia total, em unidades S.I de Joule [J]
- *e*: energia específica, em unidades S.I de Joule por Kilograma [J/Kg]

Energia pode se manifestar de diversas formas, entre elas: a energia interna U , a energia cinética E_K , a energia potencial E_P . Matematicamente, representa-se:

$$E = U + E_K + E_P + \dots \quad (2.1)$$

Sendo:

- U : energia interna, composta por:

[*] energia térmica, na forma de calor sensível e calor latente

[*] energia atômica

[*] energia química

energia interna é a parte da energia do sistema que independe do movimento, gravidade, eletricidade, capilaridade e magnetismo. É relacionada com o grau de agitação molecular

- E_K : energia cinética, relacionada com a velocidade do sistema, sendo representada por:

$$E_K = \frac{mV^2}{2}$$

- E_P : energia potencial gravitacional, relacionada com a altura do sistema em relação a uma referência, sendo representada por:

$E_P = m \cdot g \cdot z$, em que z é a altura considerada em relação a um referencial.

2.1.1 Nota sobre a representação da energia

Na maior parte da literatura, a energia total do sistema é representada por "E" (em sua forma extensiva) ou "e" (em sua forma intensiva) enquanto a energia interna é representada por "U" (ou energia interna específica "u"). Pode-se, entretanto, encontrar livros que se referem à energia total do sistema por energia interna E, e ao mesmo tempo U como energia interna (que, como apresentado, é a parte da energia relacionada com o grau de agitação molecular). Para maior clareza, vamos adotar o seguinte:

- E: energia total do sistema;
- U: energia interna do sistema;

2.2 Sistema

O estudo de qualquer área física começa com a separação de uma região restrita do espaço ou uma porção finita de matéria de sua vizinhança. À região delimitada do espaço que será o foco de nosso interesse chamamos de *Sistema*. Tudo que é externo ao sistema é chamado de *vizinhança do sistema*. Sistema e vizinhança são separados pela *fronteira do sistema*, que pode ser real (física) ou imaginária.

- Sistema → quantidade arbitrária de matéria com identidade fixa;
- Vizinhança → tudo que é externo ao sistema;
- Fronteira do sistema → superfície que separa o sistema de sua vizinhança.

A fronteira do sistema pode ser:

1. física, real

se o nosso sistema é o interior de uma sala de aula, ou o interior de um forno aquecido, as paredes da sala ou do forno são a fronteira do sistema, e é através delas que ocorre comunicação com a vizinhança;

2. imaginária (quando se delimita uma região arbitrária do espaço)

se nosso interesse é uma região delimitada no interior da sala, por exemplo, podemos *separar* essa região do espaço de sua vizinhança através de uma fronteira imaginária, que não existe fisicamente, mas que é suficiente para que caracterizemos nossa região de interesse e permita determinar sua interação com o restante da sala, que é agora a vizinhança do sistema.

As 4 leis básicas para o movimento dos fluidos são definidas para um sistema!

- Lei da conservação de massa
- 2ª Lei de Newton
- 1ª Lei da Termodinâmica
- 2ª Lei da Termodinâmica

Resumindo, chamamos de sistema a quantidade de matéria separada da "vizinhança" ou "ambiente" por um "recipiente". O sistema termodinâmico se comunica com a vizinhança pela fronteira do sistema, através de interações de trabalho e calor. Desta forma, o sistema é estudado com a ajuda de medições realizadas na vizinhança:

- termômetro inserido no sistema forma parte da vizinhança
- trabalho realizado movendo-se um pistão é medido, por exemplo, pela extensão de uma mola ou o movimento de um peso na vizinhança
- Calor transferido para o sistema é medido por mudanças na vizinhança.

Importante salientar que o recipiente não necessariamente consiste numa fronteira sólida.

- Só é necessário que ele forme uma superfície fechada e que suas propriedades sejam definidas em todos os locais
- pode transmitir ou receber calor
- pode ser deformável. Logo, capaz de transmitir trabalho ao sistema
- pode transmitir massa

Os sistemas considerados podem ser:

1. Simples homogêneo: composto de um único fluido
2. Mistura homogênea de gases
3. Sistema heterogêneo: composto das fases líquida e gasosa de uma única substância.

O sistema pode ou não trocar massa com sua vizinhança. Quando o sistema não troca massa com a vizinhança ele é um sistema fechado. Sua forma pode mudar, mas sem que haja troca de massa com a vizinhança.

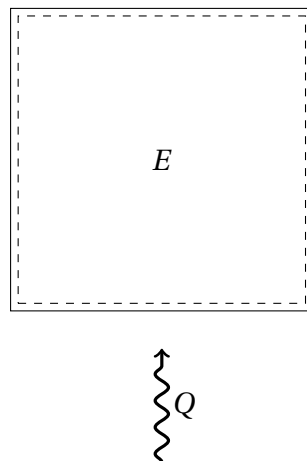


Figura 2.1 – Um recipiente com paredes rígidas sem troca de massa recebendo calor de uma fonte externa é um sistema fechado

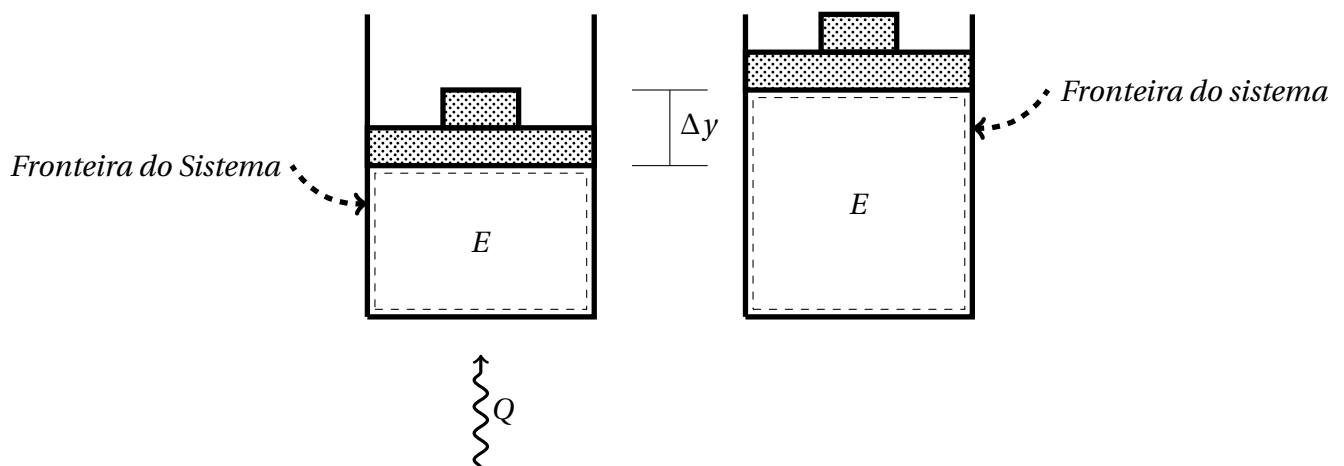


Figura 2.2 – Um sistema fechado do tipo pistão-cilindro recebe calor de uma fonte externa e realiza trabalho sobre a vizinhança à pressão constante

Por outro lado, um sistema aberto é aquele que troca massa com a vizinhança; no sistema aberto sua massa pode permanecer constante, desde que a quantidade de massa entrando e saindo do sistema sejam iguais. Usualmente na literatura, chama-se o sistema aberto de volume de controle.

- Se não há passagem de massa pelas fronteiras do sistema, diz-se que o sistema é fechado.
- Se há passagem de massa pelas fronteiras do sistema, diz-se que o sistema é aberto.
é comum na literatura se referir a sistemas abertos como *Volume de Controle*
- Um sistema adiabático não troca calor com a vizinhança
- Um sistema isolado não interage com a vizinhança (nem com troca de massa, nem calor, nem trabalho)

É importante salientar que a definição de sistema fechado ou aberto é relativa tão somente à troca de massa com a vizinhança. Ambos podem interagir com a vizinhança através de

calor e trabalho. O sistema isolado, por sua vez, não interage com a vizinhança e o sistema adiabático não troca calor com a vizinhança.

Podemos caracterizar o sistema como:

- Quantidade arbitrária de matéria
- tudo que é externo ao sistema = vizinhança
- fronteira do sistema: superfície real ou imaginária que separa o sistema de sua vizinhança
- Sistema isolado: não interage com a vizinhança
- Sistema adiabático: não troca calor com a vizinhança.

Assim que o sistema é escolhido, a próxima etapa é descrevê-lo em termos de quantidades que ajudarão na discussão de seu comportamento ou na interação com sua vizinhança. Para tal, duas abordagens gerais podem ser utilizadas: macroscópica ou microscópica.

2.3 Ponto de vista macroscópico

São propriedades de grande escala, tais como temperatura, pressão e volume. Algumas de suas características comuns são:

- 1 Não possuem hipóteses particulares relativas à estrutura da matéria;
- 2 Precisam de poucas coordenadas para serem descritas;
- 3 Estão relacionadas, de forma geral, à nossa percepção sensorial;
- 4 Podem, em geral, serem diretamente medidos.

A termodinâmica clássica foca sua atenção para o interior do sistema analisado sob o ponto de vista macroscópico. É uma disciplina cujo desenvolvimento ocorre contemporaneamente à revolução industrial, que ocorreu à partir da segunda metade do século XVIII (a grosso modo, à partir de 1760). Surgiu da necessidade de se entender o funcionamento das novas máquinas que surgiam, e de como melhorar sua eficiência.

Não se tinha, nesse período, um conhecimento profundo da teoria atômica da matéria (teoria científica que afirma que a matéria é constituída por unidades fundamentais chamadas átomos). Dalton, por exemplo, publicou sua teoria atômica em 1808, em "New System of Chemical Philosophy".

2.4 Ponto de vista microscópico

É utilizado na mecânica estatística ou na termodinâmica estatística, e considera o sistema como sendo composto por uma grande quantidade N de moléculas, cada uma sendo capaz de existir num estado, com energias $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots$; assume-se que as moléculas interagem entre si, por colisões ou forças à distância. O estado de equilíbrio do sistema é considerado aquele como o de maior probabilidade estatística, sendo o problema fundamental a determinação do número de moléculas em cada um dos estados moleculares de energia quando se está em equilíbrio. Algumas de suas características comuns são:

- 1 A estrutura da matéria é importante (por ex. assume-se a existência de moléculas)
- 2 Muitas quantidades devem ser especificadas;

- 3 Estas quantidades não fazem parte de nosso senso comum;
- 4 Estas quantidades não podem ser medidas.

Os fundamentos da termodinâmica estatística foram estabelecidas no final de 1800 por Maxwell, Boltzmann, Max Planck, Clausius, e Josiah Willard Gibbs, que começaram a aplicar estatística na teoria quântica atômica para corpos de gases ideais. Foram Maxwell e Boltzmann, trabalhando de forma independente, que chegaram a conclusões semelhantes quanto à natureza estatística dos corpos gasosos.

Boltzmann é considerado o "pai" da termodinâmica estatística com sua derivação, em 1875, da relação entre entropia S e multiplicidade Ω , apresentando o número de arranjos microscópicos que produzem o mesmo estado macroscópico para um determinado sistema. Em 1896 publicou o artigo "Lectures on Gas Theory", interpretando termodinâmica estatística e os seguintes fatores H-teorema, teoria do transporte, equilíbrio térmico, e equação de estado dos gases.

O termo "termodinâmica estatística" foi proposto para utilização na termodinâmica pelo físico e químico americano J. Willard Gibbs em 1902. Segundo Gibbs, o termo "estatística", i.e. mecânica estatística, foi usado pela primeira vez pelo físico escocês James Clerk Maxwell em 1871.

2.5 Macroscópico vs Microscópico

Quando aplicados ao mesmo sistema, ambas as abordagens devem levar à mesma conclusão. A relação entre ambas as abordagens reside no fato de que as poucas variáveis especificadas macroscopicamente são, na verdade, médias num intervalo de tempo de uma grande quantidade de características microscópicas.

Por exemplo, a quantidade macroscópica Pressão é, microscopicamente, a média da taxa de variação de momento devido às colisões moleculares numa área unitária. Pressão é uma quantidade que é percebida por nós, que podemos sentir. Ela é medida e utilizada muito antes de se acreditar em colisões moleculares. Se a teoria molecular mudar no futuro, o conceito de pressão continuará, assim como sua percepção pelos seres humanos.

Desta forma, uma diferença fundamental entre as duas abordagens é esta: as poucas quantidades macroscópicas são certas como os nossos sentidos, enquanto que a abordagem microscópica postula a existência de moléculas, seus movimentos, seus estados de energia, interações, etc. As hipóteses microscópicas podem mudar, mas suas deduções devem concordar com as obtidas macroscopicamente.

2.5.1 Hipótese do contínuo

Numa escala macroscópica, fluido se comporta como um material contínuo (mais de 2×10^{19} moléculas por cm^3 para ar à temperatura ambiente). A hipótese do contínuo é violada quando o caminho livre entre as moléculas é da mesma ordem de magnitude que o tamanho característico do escoamento.

São casos em que há baixa massa específica (escoamento rarefeito) e, na situação extrema, quando o caminho livre entre as moléculas é muito maior que o tamanho característico do escoamento (virtualmente não há colisão molecular), tais como em escoamentos a altíssimas altitudes (> 200000 pés) e em equipamentos de laboratórios especiais (lasers de baixa pressão).

2.6 Caracterização do sistema

2.6.1 Estado do sistema

Estado do sistema é a sua condição ou configuração, identificável pelas propriedades de estado e descritos em detalhes suficientes de forma que um estado possa ser distinguido de todos os outros estados.

Considere um recipiente com paredes rígidas e volume de 1m^3 cheio de água. Seja a pressão na água igual a pressão ambiente:

- Se a temperatura na água for de 25°C , o sistema está em um determinado estado
- Se a temperatura na água for de 50°C , o sistema está em um estado termodinâmico diferente do anterior

2.6.2 Propriedades do sistema

Se o sistema é deixado sozinho por um tempo suficientemente longo, sem calor ou massa transferidos e sem realização de trabalho, ele irá atingir um estado de equilíbrio. Todas as propriedades medidas macroscopicamente serão independentes do tempo, tais como pressão, massa específica e temperatura. Às variáveis que dependem somente do estado do sistema, chamamos de propriedades do sistema.

Também chamadas de:

- *coordenadas termodinâmicas* ou
- *variáveis de estado*

O sistema é caracterizado pelas suas propriedades. Propriedade é algo que pode ser quantificado, mensurado.

- São quantidades macroscópicas utilizadas para representar o estado interno do sistema.
- Uma característica observável do sistema, mensurável em termos de números e unidades de medida, incluindo quantidades físicas tais como localização, velocidade, direção, pressão, massa específica, etc.

Um sistema que pode ser representado por coordenadas termodinâmicas é chamado de sistema termodinâmico. Importantes sistemas termodinâmicos para a engenharia são os gases, vapores e misturas.

- Propriedade tem *Valor e Unidade*

Por exemplo, temperatura, pressão, volume, massa, velocidade, altura, são todas propriedades do sistema. A todas essas variáveis pode ser atribuído um valor e uma unidade, que caracterizará o sistema. As propriedades podem ser extensivas (representadas por letras maiúsculas), quando estão relacionadas a toda a massa do sistema, ou podem ser intensivas (representadas por letras minúsculas), quando são representadas por unidade de massa. Algumas propriedades são intrinsecamente intensivas, tais como temperatura e pressão (não se diz que um corpo está a 50°C por 5Kg de massa). Volume, por sua vez, pode ser representado na forma extensiva (um corpo possui volume de $V = 5\text{m}^3$) ou na forma intensiva (o volume específico do corpo é de $v = 5\text{m}^3/\text{Kg}$).

Extensivo			Intensivo		
Propriedade	Símbolo	Unidade	Propriedade	Símbolo	Unidade
Massa	m	Kg	massa específica	ρ	Kg/m^3
Volume	V	m^3	volume específico	v	m^3/Kg
Energia cinética	E_K	J	Energia cinética específica	e_K	J/Kg
Energia potencial	E_P	J	Energia potencial específica	e_P	J/Kg
Energia interna	U	J	Energia interna específica	u	J/Kg

2.6.3 Processo e Ciclo

Quando o sistema não está em equilíbrio termodinâmico, o sistema passa por uma série de estados de não equilíbrio, que irão alterar suas propriedades termodinâmicas.

Processo é a mudança de um estado para outro. Em termodinâmica considera-se que os processos ocorrem de forma lenta, de forma que a cada instante o sistema esteja sempre em equilíbrio. A essa condição chamamos de *quase-equilíbrio*. A termodinâmica clássica não busca informações da taxa em que um processo ocorre.

Um processo em regime permanente significa que as propriedades não mudam com o tempo. Não significa que as propriedades sejam iguais. Por exemplo, a pressão na entrada e saída de uma bomba hidráulica são diferentes. Se os valores medidos ao longo do tempo não variarem, diz-se que o processo ocorre em regime permanente.

Os processos também podem ocorrer com alguma propriedade constante, sendo alguns de especial interesse:

1. Isobárico: processo com pressão constante
2. Isocórico: processo com volume constante
3. Isotérmico: processo com temperatura constante

Outro processo de especial interesse é o *processo adiabático*, em que não há troca de calor entre o sistema e a vizinhança.

Ciclo, por sua vez, é tão somente um processo cujas propriedades no estado final são iguais às do estado inicial.

2.6.4 Igualdade de Temperatura

Um corpo quente e um corpo frio, quando colocados em contato, interagem, ocasionando mudança nas propriedades de ambos. Após certo tempo não se observam mais mudanças, quando se diz que os corpos estão em equilíbrio térmico.

2.6.5 Temperatura

O conceito de desigualdade de temperatura deriva do conceito de igualdade de temperatura. Desigualdade de temperatura se distingue pela observação de mudanças nas propriedades dos dois corpos em análise. Desta forma, uma escala arbitrária pode ser definida em termos de alguma propriedade conveniente de um corpo padrão, chamado termômetro.

2.7 A lei zero da termodinâmica

A aplicação prática da termometria reside no fato ou hipótese de que dois corpos respectivamente em equilíbrio térmico com um terceiro corpo devem também estar em equilíbrio térmico entre si. Esta hipótese é amplamente verificada em experimentos.

2.7.1 Processo à mesma temperatura

Quando não há equilíbrio térmico entre o sistema e sua vizinhança, ocorre interação entre ambos. Essa interação é identificada como *calor*.

Se um processo ocorre em que o sistema e sua vizinhança estão, a cada passo, à mesma temperatura, então não há interação devido à diferença de temperatura. Isso não implica que o sistema deva manter temperatura constante durante o processo.

2.8 Trabalho e Calor

As leis da termodinâmica lidam com interações entre o sistema e sua vizinhança, conforme eles passam por estados de equilíbrio. Essas interações são divididas em duas classes: 1) Trabalho; 2) Calor.

Para compreender a termodinâmica, é essencial que saibamos a resposta à duas perguntas:

1. O que é Trabalho?
2. O que é Calor?

2.8.1 Trabalho

Na mecânica clássica, trabalho é definido como um efeito produzido pelo sistema sobre sua vizinhança, quando o sistema move a vizinhança na direção de uma força exercida pelo sistema. A magnitude do efeito é medida pelo produto escalar dos vetores distância deslocada ($\vec{d}$) e a componente da força ($\vec{F}$) na direção do movimento.

Trabalho (W), para a mecânica, está relacionado a um deslocamento ($d\vec{S}$) devido a aplicação de uma força ($\vec{F}$):

$$W = \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (2.2)$$

Note que, por ser um produto escalar de dois vetores, trabalho é uma grandeza escalar, que possui apenas magnitude.

A unidade de trabalho em S.I é a mesma de calor e de energia, definida como Joules:

$$[W] = [N] \cdot [m] = \left[\frac{Kg \cdot m}{s^2} \right] \cdot [m] = \left[\frac{Kg \cdot m^2}{s^2} \right] = [J] \quad (2.3)$$

Para a termodinâmica, o conceito de trabalho é mais amplo. Diz-se que um sistema realiza trabalho se for possível imaginar um sistema alternativo ao sistema original, que passa através da mesma série de estados do processo original, cujo único efeito do sistema imaginário substituto sobre a vizinhança é o levantamento de um peso devido à aplicação de uma força.

Por essa definição, o "movimento de uma força através de uma distância" não é essencial para uma interação de trabalho. Só é necessário que exista uma vizinhança alternativa, que pode se acoplar ao processo de forma que o movimento de uma força através de uma distância seja o único efeito externo ao sistema.

O exemplo clássico é o acendimento de uma lâmpada por uma bateria. Na definição clássica, esse sistema não realiza trabalho. Contudo, pode-se imaginar um sistema alternativo, um motor com polia acoplado a um peso, em substituição à lâmpada, e nesse caso o acionamento do motor pela bateria resultará no levantamento do peso. Esse sistema alternativo realiza trabalho, portanto o sistema original também realiza trabalho.

A quantidade de trabalho realizado por um sistema é medida pelo número de peso padrão que pode ser levantado de um nível prescrito a outro na vizinhança alternativa previamente utilizada para o reconhecimento do trabalho.

Se o sistema realiza trabalho na vizinhança, então a vizinhança recebe trabalho na mesma quantidade que o sistema realiza. Se a interação de trabalho ocorre entre os corpos A e B , então $|W_A| = |W_B|$:

- W_A : trabalho realizado pelo corpo A
- W_B : trabalho realizado pelo corpo B

Regra análoga à *Terceira Lei de Newton*: ação e reação são iguais.

2.8.2 Calor e energia

Calor é energia térmica em trânsito devido a um gradiente de temperatura. Já vimos que *Energia* é a capacidade de se produzir um efeito. Energia Térmica, por sua vez, está relacionada com o grau de agitação molecular do sistema, e é representada indiretamente pela Temperatura. Mas não basta que o sistema tenha energia térmica. Deve haver uma diferença de temperatura entre o sistema e sua vizinhança, para que ocorra um trânsito dessa energia. Este trânsito ocorre no sentido do sistema de maior para o de menor energia. Relembrando:

$$E = U + E_K + E_P + \dots \quad (2.4)$$

Sendo:

- E : energia total do sistema
- U : energia interna, composta por:
 - [*]energia térmica, na forma de calor sensível e calor latente
 - [*]energia atômica
 - [*]energia química
- E_K : energia cinética $\frac{mV^2}{2}$
- E_P : energia potencial $m.g.z$

Calor é energia térmica em trânsito devido a um gradiente de temperatura

Calor é uma energia em trânsito. Não se diz que um estado termodinâmico possui determinada quantidade de calor, da mesma forma como não se diz que ele possui uma determinada quantidade de trabalho. Ambos, calor e trabalho, dependem do processo, dependem da mudança de um estado termodinâmico inicial para um estado termodinâmico final.

2.9 A primeira Lei da termodinâmica para um sistema fechado: energia, calor e trabalho

Energia, calor e trabalho são relacionados pela primeira lei da termodinâmica, que evoluiu da *Equivalência mecânica do calor*, proposto por Rumford e dos trabalhos experimentais de Joule.

Joule realizou experimentos em processos de um estado inicial a um final envolvendo vários tipos diferentes de trabalho, tais como trabalho elétrico e trabalho mecânico, em diferentes arranjos e em vários sistemas, compreendendo diversas substâncias puras, misturas e substâncias passando por reações químicas.

A Primeira Lei da Termodinâmica é um resultado empírico, confirmado por experiências práticas e de laboratório.

2.9.1 Energia e calor

Imagine um sistema fechado que recebe calor do ambiente. A temperatura do sistema irá aumentar ao longo do tempo, de um estado inicial para um estado final.

Assumindo que para o dado sistema um valor arbitrário de U é definido para um estado de referência, valores correspondentes de U para todos os outros estados podem ser encontrados pela medição do calor nos processos.

A quantidade total de calor adicionado ao sistema depende somente dos estados inicial e final do processo, e não dos estados intermediários. Pode-se, portanto, definir uma nova propriedade ou função de estado, cujo acréscimo representa o calor recebido pelo sistema no processo. Esta propriedade é chamada de energia interna do sistema U . Por ser uma variável de estado, sua variação é uma diferencial exata, representada por du .

$$dU = \delta Q \quad (2.5)$$

Trata-se de um calor adicionado da vizinhança ao sistema, que resulta num aumento da energia interna do sistema

2.9.2 Energia e trabalho

O experimento clássico de Joule envolvendo trabalho e variação de energia consistiu na medição da variação de temperatura em um aparato com uma pá imersa no interior do sistema isolado do meio (de forma a não trocar calor), acionada pela queda de dois pesos de uma altura especificada (realização de trabalho).

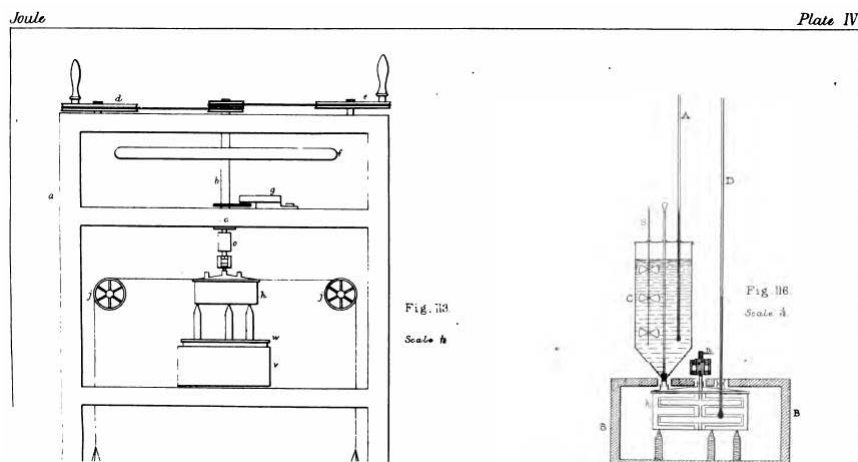


Figura 2.3 – Um sistema fechado recebendo trabalho de uma fonte externa sofrerá aumento de sua energia E e conseqüentemente aumento de sua temperatura. New determination of the mechanical equivalent of heat, 1878

O experimento requereu termômetros bastante precisos, desenvolvidos por Joule em função de sua experiência com a fabricação de cervejas.

As medições mostraram que, para uma dada quantidade de trabalho realizado, ocorria uma determinada variação de temperatura no sistema. Da mesma forma que na adição de calor, a mudança de estado é representada pelo acréscimo na função de estado energia interna, que depende apenas dos estados inicial e final do processo (logo, é uma diferencial exata):

$$dU = \delta W \quad (2.6)$$

Trata-se de um trabalho realizado da vizinhança no sistema, resultando num aumento da energia interna do sistema

2.9.3 A primeira lei

O calor adicionado ao sistema e o trabalho realizado no sistema pela vizinhança causam uma mudança de energia dU .

U é uma propriedade de estado e sua variação dU é uma diferencial exata, ou seja, depende apenas dos estados inicial e final do sistema. Para esta variação de energia dU , entretanto, existe uma quantidade infinita de formas, ou processos, pelas quais calor pode ser adicionado ao sistema e trabalho pode ser realizado sobre o sistema. Assim, tanto calor quanto trabalho são diferenciais inexatas, representadas por δ .

A formulação matemática da primeira lei se deve, entre outros, a Thomsom e a Clausius. Sua forma é:

$$dU = \delta Q + \delta W \quad (2.7)$$

sendo:

- dU : variação da energia interna do sistema
- δQ : quantidade de calor adicionado da vizinhança ao sistema
- δW : quantidade de trabalho realizado pela vizinhança no sistema

Na Eq. 2.7, podemos observar que:

- Calor adicionado da vizinhança ao sistema aumenta a energia do sistema
se um sistema recebe calor da vizinhança, sua energia específica no final do processo (u_2) é maior do que sua energia específica no início do processo (u_1). Ou seja, a energia interna do sistema é proporcional ao calor adicionado ao sistema pela vizinhança. Aqui, é importante termos bastante atenção. O calor adicionado pela vizinhança sobre o sistema é um calor positivo, e leva a um aumento da energia interna do sistema.
- Calor realizado pelo sistema na vizinhança diminui a energia do sistema
- Trabalho realizado pela vizinhança no sistema aumenta a energia do sistema
se um sistema recebe trabalho da vizinhança, sua energia específica no final do processo (u_2) é maior do que sua energia específica no início do processo (u_1). A energia interna do sistema também é proporcional ao trabalho realizado no sistema pela vizinhança. É muito importante compreendermos bem de onde e para onde vai o trabalho. O trabalho realizado pela vizinhança sobre o sistema é um trabalho positivo e, de maneira semelhante ao calor, resulta num aumento da energia interna do sistema.
- Trabalho realizado pelo sistema na vizinhança diminui a energia do sistema

A eq. 2.7 representa matematicamente a primeira lei da termodinâmica. Clausius, em seu trabalho, formulou a primeira lei como:

$$dU = \delta Q - \delta W \quad (2.8)$$

O foco de Clausius era o trabalho realizado por uma máquina térmica. Desta forma, por convenção, o trabalho realizado pelo sistema (máquina) na vizinhança é um trabalho positivo. Como, para realizar trabalho, o sistema deve gastar energia (sua energia final será menor do que sua energia inicial), há a necessidade do sinal negativo.

Na formulação anterior, foi considerado apenas a variação da energia interna U do sistema. De forma mais ampla, podemos considerar que a realização de trabalho e a adição de calor

também podem levar a uma mudança da energia cinética do sistema E_K ou a uma mudança da energia potencial do sistema E_P . Logo:

$$dE = dU + dE_K + dE_P + \dots \quad (2.9)$$

A variação de energia total do sistema pode ocorrer devido à variação da energia interna, cinética, potencial ou outras formas de energia. Considerando a variação dessas outras parcelas de energia (em especial cinética e potencial), a primeira lei pode ser escrita como:

$$dE = \delta Q + \delta W \quad (2.10)$$

2.9.3.1 Trabalho de Compressão e Expansão a pressão constante

Uma das formas mais comuns de trabalho aplicadas ao estudo da termodinâmica é o trabalho de compressão ou expansão de um sistema. Imaginemos um sistema composto por um cilindro rígido e um pistão móvel. Se a vizinhança exerce trabalho sobre o sistema, mediante a aplicação de uma pressão constante, este trabalho resultará na compressão do sistema. De maneira oposta, se o sistema exerce trabalho sobre a vizinhança, será um trabalho de expansão.

Considerando o trabalho de compressão da vizinhança sobre o sistema, temos:

$$w = F.d \quad (2.11)$$

$$w = P.A.d \quad (2.12)$$

Mas $A.d = dv$, logo:

$$w = p.dv \quad (2.13)$$

No processo de compressão, o volume final do sistema é menor do que o inicial:

$$v_2 < v_1 \rightarrow dv < 0 \quad (2.14)$$

Na formulação da primeira lei, vimos que o trabalho exercido pela vizinhança sobre o sistema aumenta a energia interna do sistema, portanto, deve ser um trabalho positivo. Assim, levando em consideração a redução no volume, e para garantir que o trabalho exercido pela vizinhança aumente a energia interna do sistema, ou seja, seja um trabalho positivo:

$$w_{\text{compressão}} = -p.dv \quad (2.15)$$

O trabalho de expansão à pressão constante exercido pelo sistema sobre a vizinhança resulta num volume final do sistema maior do que o inicial ($v_2 > v_1$), logo $dv > 0$. Como este trabalho deve ser negativo, pois reduz a energia do sistema (é um trabalho realizado pelo sistema na vizinhança), temos:

$$w_{\text{expansão}} = -p.dv \quad (2.16)$$

Logo, tanto para compressão quanto expansão, o trabalho pode ser calculado por:

$$w_{c/e} = -p.dv \quad (2.17)$$

2.9.3.2 Trabalho de compressão a volume constante

Trabalho também pode ocorrer a volume constante, como no caso de um compressor (que trabalha com líquido). Líquidos são fluidos incompressíveis, ou seja, possuem pouca variação de massa específica (e de volume específico) quando sujeitos à grandes variações de pressão. Desta forma, é perfeitamente admissível admitir que o trabalho realizado seja a volume constante, e a variação ocorre na pressão.

$$W = dP.V \rightarrow W = V(P_2 - P_1) \quad (2.18)$$

2.9.4 Primeira lei para um ciclo

Ciclo é um processo cujo estado final é igual ao inicial. Como E é uma propriedade, a variação líquida de E para um ciclo é nula. Logo:

$$\oint \delta Q + \oint \delta W = 0 \quad (2.19)$$

Ou

$$|\oint \delta Q| = |\oint \delta W| \quad (2.20)$$

Algebricamente, o calor líquido recebido pelo sistema durante um ciclo é igual ao trabalho líquido realizado pelo sistema durante o ciclo.

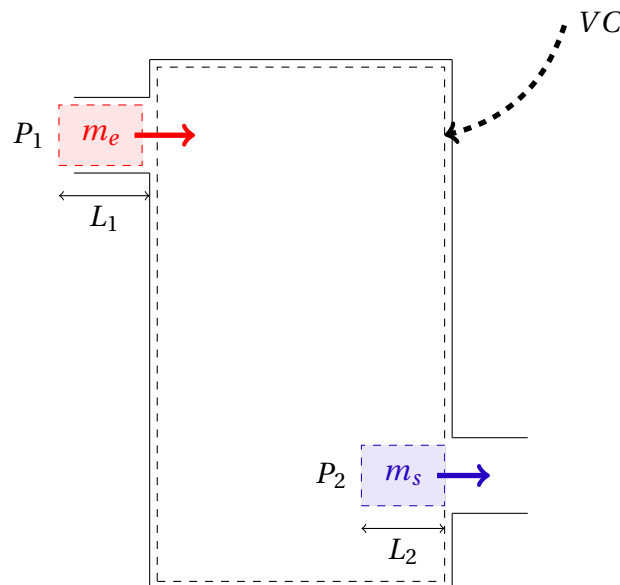
2.9.5 Processo adiabático

Se isolantes forem colocados entre o sistema e sua vizinhança, que estão a temperaturas diferentes, o calor Q se torna pequeno. Se o isolante for muito efetivo, Q se torna muito pequeno. Pode-se extrapolar para a condição em que o calor é nulo. Tal processo é denominado *adiabático*.

Processos a iguais temperaturas também são adiabáticos, pois não há gradiente de temperatura e portanto $Q = 0$.

2.10 Primeira lei da Termodinâmica para um sistema aberto

Vamos expandir a primeira lei para um sistema fechado, de forma que ela também possa representar sistemas abertos, que possuem massa entrando ou saindo do sistema (ou volume de controle).



Para estes casos, temos que considerar o trabalho realizado pela vizinhança sobre o sistema para colocar uma determinada quantidade de massa no interior do volume de controle, e o trabalho realizado pelo sistema na vizinhança para remover uma determinada quantidade de massa através da fronteira do sistema.

O primeiro termo representa um termo de trabalho positivo, ou seja, trabalho realizado pela vizinhança sobre o sistema, e resulta num aumento da energia do sistema. Imaginemos

uma força aplicada para deslocar uma determinada quantidade de volume por uma distância L . Assim:

$$W = \vec{F}_1 \cdot \vec{L}_1 \quad (2.21)$$

Podemos representar o termo de força em função da pressão exercida na região de entrada, como: $\vec{F}_1 = P_1 \cdot \vec{A}_1$. Desta forma, a equação 2.21 pode ser escrita como:

$$W_1 = P_1 \cdot \vec{A}_1 \cdot L_1 \quad (2.22)$$

Como $A_1 \cdot L_1 = V_1$, temos:

$$W_1 = P_1 \cdot V_1 \quad (2.23)$$

Adotando o mesmo procedimento, podemos obter o trabalho realizado pelo sistema na vizinhança para remover uma determinada quantidade de massa do sistema. Neste caso, o trabalho é negativo (o sistema gasta energia para realizar esse trabalho sobre a vizinhança).

$$W_2 = -P_2 \cdot V_2 \quad (2.24)$$

Os trabalhos apresentados nas Eqs. 2.23 e 2.24 são denominados trabalhos de fluxo. A primeira lei da termodinâmica para um sistema aberto pode ser escrita como:

$$dE = dQ + dW + P_1 \cdot V_1 - P_2 \cdot V_2 \quad (2.25)$$

Passando os termos de trabalho de fluxo para o lado esquerdo:

$$dE + P_2 V_2 - P_1 V_1 = dQ + dW \quad (2.26)$$

Considerando que a energia total E é composta pelos termos de energia interna, cinética e potencial, temos:

$$dU + dE_K + dE_P + P_2 V_2 - P_1 V_1 = dQ + dW \quad (2.27)$$

reagrupando os termos:

$$U_2 + P_2 V_2 - U_1 - P_1 V_1 + dE_K + dE_P = dQ + dW \quad (2.28)$$

O termo $U + P \cdot V$ aparece frequentemente nos cálculos termodinâmicos, e por isso recebe uma denominação especial. Ele é *definido* como a entalpia (H) do sistema. Como ele é resultante da combinação de propriedades de estado, ele também é uma propriedade de estado.

$$H \equiv U + PV \quad (2.29)$$

A primeira lei da termodinâmica para sistema aberto pode ser escrita em função variação da entalpia, como:

$$dH + dE_K + dE_P = dQ + dW \quad (2.30)$$

Na eq. 2.30, o lado esquerdo continua representando a variação de energia do sistema, enquanto o lado direito representa o calor recebido pelo sistema da vizinhança e o trabalho realizado pela vizinhança sobre o sistema. Desta forma, a representação $dE = \delta Q + \delta W$ continua válida.

2.10.1 Aplicação da 1ª Lei da Termodinâmica para uma turbina

Numa turbina ocorre a expansão do fluido de entrada, que chega com alta pressão e alta temperatura (alta energia). Partindo da formulação da 1ª Lei para um sistema aberto:

$$de = \delta q + \delta w \quad (2.31)$$

Abrindo os termos de variação de energia de :

$$de = du + d(pv) + de_K + de_P \quad (2.32)$$

mas, como vimos, $h = u + pv$, logo, também podemos escrever, em função da entalpia:

$$dh + de_K + de_P = \delta q + \delta w \quad (2.33)$$

Para turbinas, usualmente são desprezados os termos de energia cinética e potencial. Além disso, geralmente são consideradas turbinas adiabáticas, bem isoladas e que não trocam calor com a vizinhança. Assim:

$$dh = \delta w \quad (2.34)$$

Portanto, o trabalho realizado pela turbina pode ser determinado apenas pela variação das entalpias na entrada e saída da mesma. Note que o fluido chega com alta energia (e alta entalpia) e reduz sua energia para que possa fornecer trabalho à vizinhança. Assim $h_2 - h_1 < 0$, e consequentemente o trabalho $\delta w < 0$, o que está de acordo com nossa formulação: trabalho realizado pelo sistema na vizinhança reduz a energia do sistema.

2.10.2 Aplicação da 1ª Lei da Termodinâmica para uma bomba ou ventilador

$$du + d(pv) + de_K + de_P = \delta q + \delta w \quad (2.35)$$

em uma bomba ou ventilador, o objetivo é realizar trabalho. Ou seja, eles não são trocadores de calor. Considerando um sistema sem perdas, bem isolado, podemos afirmar que $\delta q = 0$. Logo:

$$du + d(pv) + de_K + de_P = \delta w \quad (2.36)$$

$$du + d(pv) + \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} + gz_2 - gz_1 = \delta w \quad (2.37)$$

Considerando um sistema em que não haja variação de altura e desprezando o termo de energia cinética:

$$du + d(pv) = \delta w \rightarrow dh = \delta w \quad (2.38)$$

De forma semelhante à turbina, o trabalho em uma bomba ou ventilador, desprezando os termos de energia cinética e potencial, pode ser determinado pela variação de entalpia. Entretanto, agora o trabalho é realizado pela vizinhança no sistema, e portanto aumenta a energia do sistema.

2.10.3 Aplicação da 1ª Lei da Termodinâmica: equação de Bernoulli

$$du + d(pv) + de_K + de_P = \delta q + \delta w \quad (2.39)$$

No sistema em questão, não há realização de trabalho de eixo: $\delta w = 0$.

$$d(pv) + de_K + de_P = \delta q - du \quad (2.40)$$

O termo $\delta q - du$ é um termo usualmente chamado de termo dissipativo. Ele surge devido aos efeitos dissipativos da viscosidade, transferência de calor e difusão de massa. Para um sistema não viscoso, em que os termos dissipativos são desprezados:

$$d(pv) + de_K + de_P = 0 \quad (2.41)$$

$$P_2 v_2 - P_1 v_1 + \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} + g z_2 - g z_1 = 0 \quad (2.42)$$

$$P_2 v_2 + \frac{V_2^2}{2} + g z_2 = P_1 v_1 + \frac{V_1^2}{2} + g z_1 \quad (2.43)$$

Ou, sabendo que $v = \frac{1}{\rho}$

$$\frac{P_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + g z_2 = \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + g z_1 \quad (2.44)$$

2.11 Calores específicos e a Primeira lei

A teoria do calor específico determina que a razão entre a quantidade de calor fornecida ao sistema e a variação de temperatura devido a esse calor é dada por uma constante, o poder calorífico C , específica da substância que se está avaliando. Por unidade de massa, têm-se o calor específico c da substância.

$$C = \frac{\delta Q}{\Delta T} \quad (2.45)$$

sendo $C = m.c$:

- C : poder calorífico
- m : massa
- c : calor específico

A primeira lei da termodinâmica, proveniente da teoria da equivalência mecânica do calor, propõe que calor e trabalho são intercambiáveis, sendo processos que alteram o estado termodinâmico da matéria, representada por sua energia E .

$$dE = \delta Q + \delta W \quad (2.46)$$

Surge, portanto, a questão: como compatibilizar o calor específico com a teoria da equivalência mecânica do calor, e em consequência, com a primeira lei da termodinâmica? O que representa o calor específico?

Para responder à esse questionamento, vamos considerar dois sistemas sendo aquecidos: o primeiro, com paredes rígidos, sofrerá um processo a volume constante; o segundo, composto por um sistema pistão-cilindro que pode se mover, sofrerá um processo à pressão constante. Para ambos os processos, temos que a relação entre a quantidade de calor fornecida e a variação de temperatura do sistema é dada por:

$$\delta Q = C.\Delta T \quad (2.47)$$

Pela primeira lei da termodinâmica, temos:

- Processo à volume constante

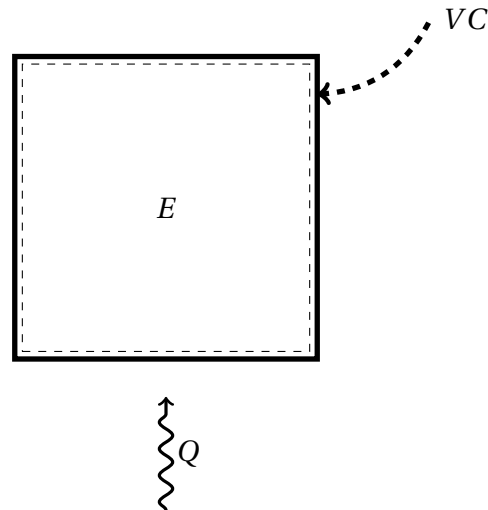


Figura 2.4 – Um sistema fechado com paredes rígidas recebendo calor de uma fonte externa à volume constante sofrerá aumento de sua energia $dE = m.c.\Delta T$

$$dE = \delta Q + \delta W$$

Como o sistema não realiza trabalho:

$$\begin{aligned} dE &= \delta Q \\ dU + dE_K + dE_P &= \delta Q \end{aligned}$$

Desprezando os termos de energia cinética e potencial: $dE = dU$. Logo:

$$dU = \delta Q$$

Substituindo a Eq. 2.47:

$$dU = C.\Delta T$$

Escrevendo em propriedades intensivas:

$$m.du = m.c.dT$$

$$c = \frac{du}{dT}$$

Como este é um processo à volume constante, representa-se o calor específico com o subíndice v:

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \quad (2.48)$$

- Processo à pressão constante

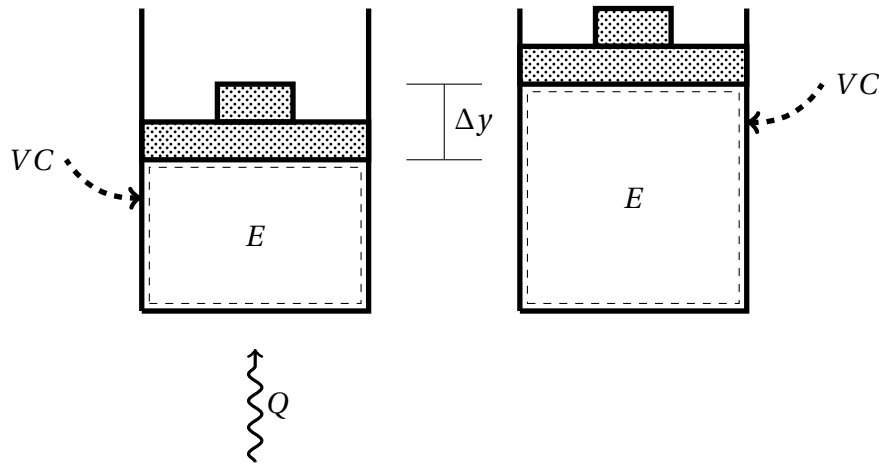


Figura 2.5 – Um sistema fechado do tipo pistão-cilindro recebe calor de uma fonte externa à pressão constante sofrerá aumento de sua energia $dE = m.c.\Delta T$

Neste caso, pela primeira lei, desprezando os termos de energia cinética e potencial, temos um trabalho de expansão ($W_E = -P.dV$). Assim:

$$\begin{aligned} dU &= \delta Q + \delta W \\ dU &= \delta Q - P.dV \\ dU + P.dV &= \delta Q \end{aligned} \quad (2.49)$$

Da definição da entalpia: $H = U + P.V$, e como a pressão é constante:

$$dH = \delta Q \quad (2.50)$$

Substituindo na Eq.2.47:

$$\begin{aligned} dH &= C.\Delta T \\ m.dh &= m.c.\Delta T \\ c &= \frac{dh}{dT} \end{aligned} \quad (2.51)$$

De maneira semelhante ao processo a volume constante, indicamos que o processo é à pressão constante pelo subíndice P. Logo:

$$c_P = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P \quad (2.52)$$

2.12 Motores térmicos e a Segunda Lei da Termodinâmica

Um motor térmico é definido como um sistema de identidade fixa que passa por um processo cíclico durante o qual ocorre interação de calor e trabalho com a vizinhança. Ex.: planta de energia a vapor.

Turbinas a gás de ciclo aberto e motores de combustão interna não são, por esta definição, motores térmicos, pois não operam segundo um ciclo.

2.12.1 Eficiência dos motores térmicos

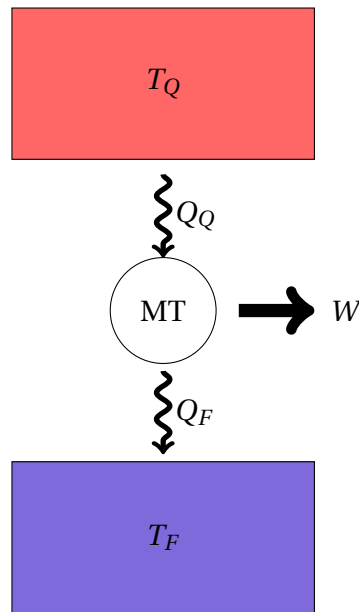


Figura 2.6 – Uma fonte quente à temperatura T_Q fornece calor Q_Q para a máquina térmica, que realiza trabalho W e rejeita parte do calor Q_F para uma fonte fria à temperatura T_F .

Uma fonte de calor à temperatura T_q é a parte da vizinhança que fornece calor ao sistema. A quantidade de calor recebida dessa fonte é denominada Q_q . A quantidade de calor rejeitada pelo sistema durante o ciclo para a vizinhança à temperatura T_F é Q_F .

Pela 1ª Lei, para um processo cíclico, o trabalho líquido do motor durante um ciclo completo é:

$$W_{liq} = Q_Q - Q_F \quad (2.53)$$

A saída útil do motor é o trabalho mecânico W_{liq} , enquanto o fator relacionado ao custo de operação é o calor recebido Q_Q . O rendimento η é definido como:

$$\eta = \frac{W_{liq}}{Q_Q} = \frac{Q_Q - Q_F}{Q_Q} = 1 - \frac{Q_F}{Q_Q} \quad (2.54)$$

2.12.1.1 Movimento perpétuo de segundo tipo

Conforme Eq. 2.54, se o calor rejeitado para a fonte fria for nulo ($Q_F = 0$), teríamos um motor térmico com eficiência de 100%, chamado de máquina de movimento perpétuo de segundo tipo. Se tal máquina pudesse ser construída, seria possível obter potência mecânica sem o uso de qualquer combustível.

A experiência nos mostra que movimento perpétuo de segundo tipo é impossível de se obter. Essa afirmação tem implicações práticas tão importantes que é chamada de *Segunda Lei da Termodinâmica*, que pode ser definida como:

Nenhum sistema pode passar por um ciclo completo de estados e entregar trabalho para a vizinhança enquanto troca calor com somente uma única fonte de calor à temperatura uniforme.

2.12.2 A escala de temperatura absoluta

Consideremos uma máquina térmica operando entre as fontes quente à temperatura T_Q e fria à temperatura T_F . A quantidade de trabalho realizado será uma função dessas temperaturas. Assim:

- $Q_Q = F(T_Q)$
- $Q_F = F(T_F)$

O rendimento dessa máquina térmica pode ser representado por:

$$\eta = 1 - \frac{Q_F}{Q_Q} = 1 - \frac{F(T_F)}{F(T_Q)} \quad (2.55)$$

Para uma máquina operando com máxima eficiência, temos que:

$$\frac{Q_F}{Q_Q} = \frac{F(T_F)}{F(T_Q)} \quad (2.56)$$

Consideremos agora uma temperatura intermediária T_i , e duas máquinas térmicas em série, operando entre as temperaturas T_Q e T_i e T_i e T_F , respectivamente, de forma que:

$$\eta_1 = 1 - \frac{Q_i}{Q_Q} = 1 - \frac{F(T_i)}{F(T_Q)} \quad (2.57)$$

$$\eta_2 = 1 - \frac{Q_F}{Q_i} = 1 - \frac{F(T_F)}{F(T_i)} \quad (2.58)$$

O que resulta em:

$$\frac{Q_i}{Q_Q} = \frac{F(T_i)}{F(T_Q)} \quad (2.59)$$

$$\frac{Q_F}{Q_i} = \frac{F(T_F)}{F(T_i)} \quad (2.60)$$

Podemos relacionar a Eq. 2.56 com as Eq. 2.59 e 2.60

$$\left(\frac{Q_i}{Q_Q} \right) \left(\frac{Q_F}{Q_i} \right) = \frac{Q_F}{Q_Q} \quad (2.61)$$

$$\left(\frac{F(T_i)}{F(T_Q)} \right) \left(\frac{F(T_F)}{F(T_i)} \right) = \frac{F(T_F)}{F(T_Q)} \quad (2.62)$$

$$\left(\frac{Q_F}{Q_Q} \right) = \frac{F(T_F)}{F(T_Q)} \quad (2.63)$$

Assim, a relação entre os calores fornecidos pelas fonte quente e fria é função apenas das temperaturas dessas fontes. Diversas funções F satisfazem essa razão, e sua escolha é arbitrária. William Thomson (Lord Kelvin) escolheu a própria temperatura como função $F(T) = T$, definindo uma escala de temperatura termodinâmica, conhecida como escala absoluta:

$$\left(\frac{Q_Q}{Q_F} \right)_{rev} = \frac{T_Q}{T_F} \quad (2.64)$$

O ponto triplo da água (estado em que as fases líquida, sólida e gasosa existem em equilíbrio) foi definido como tendo o valor de 273,16 K pela Conferência internacional de pesos e medidas em 1954.

A *escala de temperatura absoluta* (ou escala Kelvin), representada pela Eq. 2.64, é uma escala de temperatura definida em termos da eficiência de um motor térmico reversível operando entre dois reservatórios de temperaturas fixas e uniformes e depende somente das temperaturas dos reservatórios e não da natureza do motor nem do fluido. Utilizando um motor reversível como termômetro é possível evitar uma dificuldade básica na construção de termômetros, qual seja, que termômetros diferentes geralmente coincidem em um ou dois pontos fixos mas diferem em todos os outros.

É impossível para um sistema ter temperatura absoluta nula ou negativa.

2.12.3 Reversibilidade

A experiência prática de que eventos naturais ocorrem em uma direção somente, ou seja, de que processos reais são irreversíveis, está intimamente conectada à 2ª Lei.

- Reversibilidade

Diz-se que um processo é reversível se for possível "apagar" os seus efeitos, ou seja, se existir uma maneira conhecida pela qual o sistema e toda a sua vizinhança podem ser restaurados para os seus respectivos estados iniciais. O processo pode ser completamente desfeito.

Nenhum processo real é reversível, mas geralmente processos reais podem ser refinados ao ponto em que se aproxima de processos reversíveis.

Processo reversível é um padrão útil de comparação contra o qual processos reais podem ser avaliados.

2.12.4 Irreversibilidade

Sua definição está implícita na definição de processos reversíveis, ou seja, diz-se que um processo é irreversível se não houver maneira conhecida pela qual o sistema e sua vizinhança possam ser restaurados aos seus respectivos estados iniciais.

Para as ciências térmicas, as irreversibilidades podem ser apontadas por três causas básicas: I) viscosidade; II) Condução de calor; III) difusão de massa.

Se houvesse uma maneira de se desfazer qualquer processo irreversível, seria possível construir uma máquina de movimento perpétuo de segundo tipo.

Inserir figura.

2.12.5 Máxima eficiência dos motores térmicos: o motor térmico de Carnot

Fazendo uso da escala de temperatura absoluta, para um motor térmico sem irreversibilidades, a máxima eficiência dependerá apenas das temperaturas das fontes quente e fria. Assim:

- Corolário: nenhum motor térmico operando entre duas fontes de calor de temperaturas fixas e uniformes pode ter eficiência térmica maior do que um motor térmico reversível que opera entre as mesmas duas fontes de calor, caso contrário seria possível obter movimento perpétuo de segunda espécie.
- Corolário: como consequência do corolário anterior, todo motor térmico reversível operando entre os mesmos dois reservatórios de temperaturas fixas e uniformes possuem a mesma eficiência térmica. Esse rendimento é chamado de rendimento de Carnot:

$$\eta_{Carnot} = 1 - \frac{Q_F}{Q_Q} = 1 - \frac{T_F}{T_Q} \quad (2.65)$$

É importante salientar que as temperaturas para a determinação do rendimento na Eq. 2.65 são expressas na escala Kelvin (absoluta).

2.12.6 Inigualdade de Clausius

O trabalho líquido de uma máquina térmica pode ser calculado em função de seu rendimento, como:

$$W_{liq} = \eta \cdot Q_Q \quad (2.66)$$

O máximo trabalho possível ocorre para uma máquina de Carnot, sem irreversibilidades (W_{liq}^{ideal}). Uma máquina real, que possui irreversibilidades, irá produzir menos trabalho líquido do que a máquina de Carnot operando entre as mesmas fontes de temperatura quente e fria. Logo:

$$W_{liq}^{real} \leq W_{liq}^{ideal} \quad (2.67)$$

Para a máquina real, o rendimento pode ser calculado pelos calores das fonte fria e quente, enquanto que para a máquina ideal o rendimento pode ser calculado pelas temperaturas:

- Máquina real: $\eta_{real} = 1 - \frac{Q_F}{Q_Q}$
- Máquina ideal: $\eta_{ideal} = 1 - \frac{T_F}{T_Q}$

O rendimento real é menor ou igual ao rendimento ideal. Logo:

$$\begin{aligned} \eta_{real} &\leq \eta_{ideal} \\ 1 - \frac{Q_F}{Q_Q} &\leq 1 - \frac{T_F}{T_Q} \end{aligned} \quad (2.68)$$

O que resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{Q_F}{Q_Q} &\geq \frac{T_F}{T_Q} \\ \frac{Q_F}{T_F} &\geq \frac{Q_Q}{T_Q} \\ \frac{Q_Q}{T_Q} - \frac{Q_F}{T_F} &\leq 0 \end{aligned} \quad (2.69)$$

Calor é uma grandeza vetorial. O calor recebido pelo sistema Q_Q têm valor positivo, pois aumenta a energia do sistema. Já o calor rejeitado pelo sistema Q_F têm valor negativo, pois reduz a energia do sistema.

Quando um sistema passa por um ciclo completo, movimento perpétuo de segundo tipo é possível a não ser que:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \quad (2.70)$$

A Eq. 2.70 é conhecida como *Inigualdade de Clausius*, sendo:

- δQ : pequena quantidade de calor recebido em parte da fronteira do sistema durante uma parte elementar do ciclo;

- T : temperatura absoluta correspondente naquela parte da fronteira;
- A integral deve ser somada em todas as partes da fronteira e por todo o ciclo.

Em um ciclo feito de etapas reversíveis:

$$\oint \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{rev} = 0 \quad (2.71)$$

2.13 A Entropia

Considere um ciclo composto por duas etapas reversíveis: o sistema sai do estado inicial 1, vai para um estado final 2 e volta para o estado inicial 1. Assim:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\delta Q_{12}}{T} + \int_2^1 \frac{\delta Q_{21}}{T} &= 0 \\ \int_1^2 \frac{\delta Q_{12}}{T} &= - \int_2^1 \frac{\delta Q_{21}}{T} \\ \int_1^2 \frac{\delta Q_{12}}{T} &= \int_1^2 \frac{\delta Q_{21}}{T} \end{aligned} \quad (2.72)$$

A Eq. 2.72 nos mostra que quando se vai de um estado 1 para um estado 2 por dois processos diferentes, ambos reversíveis, a integral de $\frac{\delta Q}{T}$ será a mesma para ambos os processos. De forma mais geral, pode-se dizer que esta integral depende somente dos estados finais e não dos estados intermediários. A quantidade $\frac{\delta Q}{T}$ para um processo reversível infinitesimal é, portanto, uma diferencial exata, e é o diferencial de uma propriedade termodinâmica, chamada *Entropia*:

$$dS \equiv \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{rev} \quad (2.73)$$

Assim como a 1ª Lei levou à definição de uma nova propriedade (energia interna), a 2ª Lei leva à definição de uma nova propriedade termodinâmica, a entropia.

A entropia é uma propriedade que possui valor particular em relação a alguma condição de referência, para cada estado de equilíbrio do sistema.

O valor de referência da entropia é definido pela *Terceira Lei da Termodinâmica*, que especifica o valor zero quando o sistema está na temperatura de zero absoluto $T = 0[K]$.

Consideremos um processo com fenômenos dissipativos (viscosidade, condutividade térmica ou difusão de massa) de um estado inicial 1 até um estado 2 e finalmente retornando para o estado final 1, igual ao estado inicial. Assim:

$$\oint \left(\frac{\delta Q}{T} \right) = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} + \int_2^1 \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \quad (2.74)$$

Considerando o processo $2 \rightarrow 1$ reversível:

$$\begin{aligned} \int_2^1 \frac{\delta Q}{T} &= S_1 - S_2 \\ \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{rev} &= S_1 - S_2 \end{aligned} \quad (2.75)$$

Assim:

$$\int_1^2 \frac{\delta Q}{T} + S_1 - S_2 \leq 0$$

$$S_2 - S_1 \geq \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} \quad (2.76)$$

$$dS_{1 \rightarrow 2} \geq \frac{\delta Q}{T} \quad (2.77)$$

Ou

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{rev} + dS_{irrev} \quad (2.78)$$

em que o termo $dS_{irrev} \geq 0$ representa as componentes dos fenômenos dissipativos, sendo sempre maior ou igual a zero:

- $dS_{irrev} > 0$: processo irreversível
- $dS_{irrev} = 0$: processo reversível

A Eq.(2.77) é a forma analítica mais conveniente da segunda lei. Se o sistema é isolado de toda troca de calor com a vizinhança:

$$dS_{adiab} \geq 0 \quad (2.79)$$

As Eqs.(2.77) e (2.79) representam o princípio do aumento da entropia. Se nos basearmos tão somente pela primeira Lei, não há qualquer restrição entre conversão de calor e trabalho em energia e vice-versa. Na prática, entretanto, sabemos que determinados processos não ocorrem naturalmente, ou seja, todo processo possui uma direção natural para ocorrer.

Um processo ocorrerá na direção em que a entropia do sistema mais o da sua vizinhança sempre aumentem (ou, no mínimo, permaneçam constantes).

2.13.1 Cálculo da entropia

Considerando um processo de aquecimento reversível:

$$ds = \frac{\delta q}{T} \rightarrow \delta q = T.ds \quad (2.80)$$

e um trabalho de expansão ou compressão:

$$w = -Pdv \quad (2.81)$$

temos, da primeira lei:

$$\begin{aligned} de &= \delta q + \delta w \\ de &= T.ds - p.dv \\ T.ds &= de + p.dv \\ ds &= \frac{de + p.dv}{T} \end{aligned} \quad (2.82)$$

Desprezando os termos de energia cinética e potencial (considerando apenas a energia interna):

$$\begin{aligned} de &= du \\ ds &= \frac{du + p.dv}{T} \end{aligned} \quad (2.83)$$

Derivando a entalpia $h \equiv u + p \cdot dv$, temos:

$$\begin{aligned} dh &= du + p dv + v dP \\ p dv &= dh - du - v dP \end{aligned} \quad (2.84)$$

Logo:

$$\begin{aligned} T ds &= du + dh - du - v dP \\ T ds &= dh - v dP \end{aligned} \quad (2.85)$$

As equações (2.83) e (2.85) são conhecidas como Equações de Gibbs, sendo reescritas abaixo para maior destaque:

$$T ds = du + P dv \quad (2.86)$$

$$T ds = dh - v dP \quad (2.87)$$

Elas permitem determinar a variação da entropia com base na variação de outras propriedades do sistema, quais sejam: energia interna, pressão, volume e temperatura.

O gás perfeito

Um gás é uma coleção de partículas (moléculas, átomos, íons, elétrons, etc) em movimento aleatório, com um campo de força permeando essas partículas. As forças intermoleculares, força com que cada partícula interage com suas partículas vizinhas, correspondem a forças de atração fracas a longas distâncias e de repulsão fortes a pequenas distâncias. Para muitas aplicações da engenharia, inclusive muitos escoamentos compressíveis a temperatura e pressão característicos, a distância média entre as partículas é maior do que 10 diâmetros moleculares, situação em que há baixa força de atração. Para tal situação, o efeito das forças intermoleculares nas propriedades do gás é desprezível.

Definição: gás perfeito é aquele no qual as forças intermoleculares são desprezadas.

- Leva à equação de estado para gases ideais
- Historicamente, é o resultado dos trabalhos de Robert Boyle (séc XVII), Jacques Charles (séc XVIII), Joseph Gay-Lussac e John Dalton (por volta de 1800) e Avogrado, tendo sido sintetizada por Clapeyron.

É um resultado empírico resultante de observações

$$PV = mRT \quad (3.1)$$

sendo que:

- T : temperatura, em Kelvin
- R : Constante específica do gás [J/KgK]
- m : massa do sistema [Kg]
- V : volume do sistema [m^3]
- P : Pressão [N/m^2]

3.1 Formas alternativas da equação dos gases ideais

1. Dividindo a Eq. 3.1 pela massa:

$$P \frac{V}{m} = \frac{m}{m} RT \rightarrow Pv = RT \quad (3.2)$$

2. Substituindo $v = \frac{1}{\rho}$

$$P = \rho R T \quad (3.3)$$

3. Utilizando a constante universal dos gases $\bar{R} = 8314 \left[\frac{J}{K \cdot mol \cdot K} \right]$:

$$R = \frac{\bar{R}}{M} \quad (3.4)$$

sendo $M = \frac{m}{n}$ a massa molar, m a massa em [Kg] e n o número de mols (quantidade que contém massa numericamente igual ao peso molecular do gás [$kg \cdot mol$]). Ex. O_2 : $1 Kg \cdot mol = 32 Kg$. $1 kg \cdot mol$ sempre contém $6,02 \times 10^{26}$ moléculas). Assim:

$$P \cdot V = m \frac{\bar{R}}{M} \cdot T \quad (3.5)$$

Mas $\frac{m}{M} = n$. Logo:

$$P \cdot V = n \cdot \bar{R} \cdot T \quad (3.6)$$

4. Por concentração

Dividindo a Eq. 3.6 pelo volume

$$P = C \bar{R} T \quad (3.7)$$

sendo $C = n/V$: concentração [$kg \cdot mol / m^3$]

Como processo mnemônico:

1. Quando a equação lida com mols: usar a constante universal dos gases $\bar{R} = 8314 [J / kg \cdot mol \cdot K]$
2. Quando a equação lida com massa: usar a constante específica do gás $R = \frac{\bar{R}}{M}$
para o ar padrão: $R = 287 [J / Kg \cdot K]$
3. Quando a equação lida com partículas: usar a constante de Boltzmann, $k = 1,38 \times 10^{-23} [J / K]$
(constante do gás por partícula)

$$P = n k T$$

$n = N_A \cdot C$: densidade numérica (número de partículas por unidade de volume)

N_A : número de partículas em um mol.

$k = \left(\frac{\bar{R}}{N_A} \right)$ constante do gás por partícula (Constante de Boltzmann)

3.2 Precisão em se assumir gás ideal

Por determinação experimental, a equação é válida para:

- Baixas pressões ($< 1 \text{ ATM}$)
- Altas temperaturas ($\geq 273 K$)

Para gases puros: $\frac{Pv}{RT} = 1 + [Er \approx 1\%]$.

Para baixas temperaturas e altas pressões, as forças intermoleculares são importantes. Neste caso, a equação para gases reais (equação de Van der Waals), é dada por:

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \quad (3.8)$$

a,b: constantes (dependem do gás). O desvio para a equação dos gases ideais é da ordem de $\frac{P}{T^3}$.

Para a grande maioria das aplicações de dinâmica dos gases, a temperatura e pressão são tais que $P = \rho RT$ pode ser aplicada. Estes serão os casos estudados neste curso.

EXEMPLO

Um vazo de pressão com volume de $10[m^3]$ é utilizado para armazenar ar a alta pressão para operar um tunel de vento supersônico. Se a pressão e a temperatura do ar no vazo são de $20[atm]$ e $300[K]$, respectivamente, qual a massa de ar armazenada?

■ SOLUÇÃO

$$\begin{aligned} 1[atm] &= 1,01 \times 10^5 [N/m^2] \\ \rho &= \frac{P}{RT} = \frac{20(1,01 \times 10^5)}{287 \cdot 300} = 23,46 \text{ Kg}/m^3 \\ m &= \rho V = 10 \cdot 23,46 = 234,6 \text{ kg} \end{aligned}$$

EXEMPLO

Calcule a compressibilidade isotérmica do ar à pressão de $0,5[atm]$

■ SOLUÇÃO

$$\begin{aligned} \tau_T &= -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_T \\ v &= \frac{RT}{P} \rightarrow \frac{1}{v} = \frac{P}{RT} \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_T &= -\frac{RT}{P^2} \rightarrow \tau_T = -\frac{P}{RT} \left(-\frac{RT}{P^2} \right) = \frac{PRT}{RT P^2} \\ \tau_T &= \frac{1}{P} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ ATM}^{-1} \rightarrow \tau_T = 1,98 \times 10^{-5} [m^2/N] \end{aligned}$$

3.3 Calores específicos para gases perfeitos

Em geral, uma propriedade de uma substância pode ser expressa como uma função de duas propriedades independentes quaisquer. Considerando, por exemplo, a energia interna em função do volume específico e da temperatura: $u = u(v, T)$, e calculando sua derivada em função destas duas propriedades:

$$du = \left[\frac{\partial u}{\partial T} \right]_v dT + \left[\frac{\partial u}{\partial v} \right]_T dv$$

Para gases perfeitos termicamente pode-se mostrar que as propriedades termodinâmicas são funções apenas da temperatura (esta conclusão é resultante dos experimentos de Joule). Assim:

$$du = \left[\frac{\partial u}{\partial T} \right]_v dT \quad (3.9)$$

Da mesma forma, para a entalpia:

$$dh = \left[\frac{\partial h}{\partial T} \right]_P dT \quad (3.10)$$

Da definição de calores específicos:

$$c_v = \left. \frac{du}{dT} \right|_v \quad (3.11)$$

$$c_P = \left. \frac{dh}{dT} \right|_P \quad (3.12)$$

Resulta que:

- $h = h(T) \rightarrow dh = c_P dT$
- $u = u(T) \rightarrow du = c_v dT$

Neste caso, tanto c_P quanto c_v também são funções apenas da temperatura. Podemos também relacionar os calores específicos com a constante do gás R :

$$h = u + pv$$

Mas $pv = RT$, logo:

$$h = u + RT \rightarrow dh = du + R dT + T dR \rightarrow dh = du + R dT$$

Como $dh = c_P dT$ e $du = c_v dT$, temos:

$$dh = du + R dT$$

$$c_P dT = c_v dT + R dT$$

$$c_P = c_v + R$$

$$c_P - c_v = R \quad (3.13)$$

A diferença entre os calores específicos é sempre constante.

Define-se também a razão entre os calores específicos como:

$$k = \frac{c_P}{c_v} \quad (3.14)$$

3.4 Cálculo da entropia para gases perfeitos termicamente

Da Eq. (2.86) - $Tds = du + Pdv$:

$$Tds = c_v dT + Pdv \rightarrow ds = c_v \frac{dT}{T} + \frac{P}{T} dv \quad (3.15)$$

Podemos reescrever o termo $\frac{P}{T}$ em função de v , com o uso da equação dos gases ideais: $Pv = RT$,

$$\frac{P}{T} = \frac{R}{v} \quad (3.16)$$

Logo:

$$ds = c_v \frac{dT}{T} + \frac{R}{v} dv \quad (3.17)$$

Integrando entre os estados inicial 1 e final 2:

$$\begin{aligned} \int_1^2 ds &= \int_1^2 c_v \frac{dT}{T} + \int_1^2 \frac{R}{v} dv \\ s_2 - s_1 &= \int_1^2 c_v \frac{dT}{T} + R \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

A Eq.(3.18) é válida para um gás perfeito termicamente, e pode ser avaliada se c_v é conhecido em função da temperatura. Assumindo-se um gás perfeito caloricamente, em que c_v é constante:

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + R \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right) \quad (3.19)$$

Aplicando o mesmo procedimento para a Eq. (2.87): $Tds = dh - v dP$,

$$Tds = c_p dT - v dP \rightarrow ds = c_p \frac{dT}{T} - \frac{v}{T} dP \quad (3.20)$$

Escrevendo o termo $\frac{v}{T}$ em função da pressão, com o uso da equação dos gases ideais $Pv = RT$:

$$\frac{v}{T} = \frac{R}{P} \quad (3.21)$$

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - \frac{R}{P} dP \quad (3.22)$$

Integrando entre os estados inicial 1 e final 2:

$$\int_1^2 ds = \int_1^2 c_p \frac{dT}{T} - \int_1^2 \frac{R}{P} dP \quad (3.23)$$

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 c_p \frac{dT}{T} - R \left(\ln \frac{P_2}{P_1} \right) \quad (3.24)$$

A Eq.(3.24) é válida para um gás perfeito termicamente, e pode ser avaliada se c_p é conhecido em função da temperatura. Assumindo-se um gás perfeito caloricamente, em que c_p é constante:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - R \left(\ln \frac{P_2}{P_1} \right) \quad (3.25)$$

Ver gráfico do calor específico para gases perfeitos

EXEMPLO

Ar escoia em regime permanente entre duas seções de um duto. Na seção 1 $T_1 = 80[^\circ\text{C}]$ e $P_1 = 301[\text{KPa}]$ e na seção 2 $T_2 = 180[^\circ\text{C}]$ e $P_2 = 181[\text{KPa}]$. Calcule as mudanças de: a) energia interna; b) entalpia; c) massa específica; d) entropia.

■ SOLUÇÃO

Vamos considerar modelagem a ar frio, com calores específicos constantes. Assim, para o ar, temos $k = 1,4$, $c_p = 1,004[\text{KJ}/\text{Kg.K}]$ e $c_v = 0,717[\text{KJ}/\text{Kg.K}]$. A variação de energia interna e de entalpia pode ser determinada, para gases ideais, em função dos calores específicos e das variações de temperaturas:

a)

$$du = c_v.dT$$

$$du = 0,717 \left[\frac{\text{KJ}}{\text{Kg.K}} \right] (180 - 80)[\text{K}]$$

$$du = 71,7[\text{KJ}/\text{Kg}]$$

b)

$$dh = c_p.dT$$

$$dh = 1,004 \left[\frac{\text{KJ}}{\text{Kg.K}} \right] (180 - 80)[\text{K}]$$

$$dh = 100,4[\text{KJ}/\text{Kg}]$$

c) As massas específicas podem ser determinadas pela equação dos gases ideais:

$$\rho = \frac{P}{R.T}$$

$$\rho_1 = \frac{301[\text{KPa}]}{0,287 \left[\frac{\text{KJ}}{\text{kg.K}} \right] \cdot (80 + 273,15[\text{K}])} = 2,9698[\text{kg}/\text{m}^3]$$

$$\rho_2 = \frac{181[\text{KPa}]}{0,287 \left[\frac{\text{KJ}}{\text{kg.K}} \right] \cdot (180 + 273,15[\text{K}])} = 1,3917[\text{kg}/\text{m}^3]$$

Assim:

$$d\rho = \rho_2 - \rho_1 = -1,5780[\text{Kg}/\text{m}^3]$$

d) A variação da entropia para gases ideais é:

$$ds = c_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - R \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right)$$

$$ds = 1,004 \left[\frac{\text{KJ}}{\text{Kg.K}} \right] \ln \left(\frac{180 + 273,15}{80 + 273,15} \right) - 0,287 \left[\frac{\text{KJ}}{\text{Kg.K}} \right] \ln \left(\frac{181}{301} \right)$$

$$ds = 0,3963[\text{KJ}/\text{Kg.K}]$$

■ CONSIDERAÇÕES

Nos cálculos para gases ideais, a temperatura deve ser convertida para Kelvin. Entretanto, para as variações de energia interna e entalpia, precisamos da variação da temperatura e não da temperatura em si. A variação é a mesma na escala Celsius e Kelvin.

Na equação dos gases ideais deve-se atentar para a mesma escala da pressão e da constante R . No exemplo a pressão foi utilizada em KPa e a constante do gás em $\text{kJ}/\text{Kg.K}$.

3.5 Equações Isoentrópicas para gases ideais

Um processo isoentrópico é um processo adiabático e reversível. Assim:

- Adiabático: $\delta q = 0$
- Reversível: $ds_{irrev} = 0$

Utilizando as equações 3.19 e 3.25 para cálculo da entropia para gás perfeito termicamente, reescritas abaixo, obtemos as relações isoentrópicas, que são de grande utilidade em escoamentos compressíveis e nos ciclos de geração de potência a gás (Ciclo Otto, Ciclo Diesel e Ciclo Brayton).

$$\begin{aligned}
 s_2 - s_1 &= c_v \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + R \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right) & s_2 - s_1 &= c_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - R \left(\ln \frac{P_2}{P_1} \right) \\
 0 &= c_v \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + R \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right) & 0 &= c_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - R \left(\ln \frac{P_2}{P_1} \right) \\
 c_v \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) &= -R \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right) & c_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) &= R \left(\ln \frac{P_2}{P_1} \right) \\
 \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) &= -\frac{R}{c_v} \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right) & \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) &= \frac{R}{c_p} \left(\ln \frac{P_2}{P_1} \right) \\
 \frac{T_2}{T_1} &= \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{-\frac{R}{c_v}} & \left(\frac{T_2}{T_1} \right) &= \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{R}{c_p}}
 \end{aligned}$$

Manipulando o termo $\frac{R}{c_v}$ para deixá-lo em função de k

e o termo $\frac{R}{c_p}$

$$-\frac{R}{c_v} = -\frac{c_p - c_v}{c_v} = -\left(\frac{c_p}{c_v} - 1 \right) = -(k - 1) = 1 - k \quad \frac{R}{c_p} = \frac{c_p - c_v}{c_p} = \frac{c_p}{c_p} - \frac{c_v}{c_p} = 1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{[1-k]} \quad (3.26)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \quad (3.27)$$

A Eq.(3.26) pode ser reescrita em função das massas específicas, sabendo que $\rho_2/\rho_1 = v_1/v_2$:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{[1-k]} \rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{k-1} \quad (3.28)$$

Assim:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{k-1} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \quad (3.29)$$

EXEMPLO

Um compressor centrífugo comprime ar adiabaticamente de 101[KPa] e 20[°C] para 7[bar]. Qual é o menor aumento de temperatura possível?

■ SOLUÇÃO

O menor aumento de temperatura é obtido em um processo isoentrópico (adiabático e reversível). Assim, da Eq.(3.29), têm-se:

$$\begin{aligned}\frac{T_2}{T_1} &= \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} \\ \frac{T_2}{T_1} &= \left(\frac{700[KPa]}{101[KPa]}\right)^{\frac{1,4-1}{1,4}} \\ \frac{T_2}{T_1} &= 1,7387 \\ T_2 &= (20 + 273,15) \cdot (1,7387) = 509,70[K]\end{aligned}$$

Dessa forma, a menor temperatura do gás na saída do processo de compressão será de $509,7[K] = 236,55[^\circ C]$. O menor aumento de temperatura possível será de:

$$236,55[^\circ C] - 20[^\circ C] = 216,55[^\circ C]$$

As relações isoentrópicas, válidas para processos adiabáticos e reversíveis podem parecer, a princípio, bastante restritivas e de aplicabilidade limitada. Entretanto, isso não é verdade. Em regiões adjacentes à superfície de aerofólios e das paredes de bocais de foguetes, por exemplo, ocorre a formação de uma camada limite, região em que os mecanismos dissipativos são importantes (viscosidade, condutividade térmica e difusão são grandes). Nesta região ocorre aumento da entropia. Para o fluido fora da camada limite térmica e viscosa, os efeitos dissipativos são desprezíveis, tanto da viscosidade quanto da transferência de calor.

O escoamento pode ser avaliado como isoentrópico em grandes regiões de escoamentos sobre corpos aerodinâmicos

EXEMPLO

Considere o escoamento isoentrópico de um gás ideal com calores específicos constantes e avaliados à temperatura ambiente. Na câmara de combustão o gás resultante da reação entre combustível e oxidante está à pressão de $15[\text{atm}]$ e temperatura de $2500[K]$. O peso molecular e calor específico a pressão constante do gás da combustão são 12 e 4157 J/K.g.K , respectivamente. O gás expande à velocidade supersônica através do bocal com temperatura de $1350K$ na saída do bocal. Calcule a pressão na saída.

■ SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}R &= \frac{\bar{R}}{M} = \frac{8314}{12} = 692,8 \frac{J}{kg K} \\ c_v &= c_p - R = 4157 - 692,8 = 3464 \frac{J}{kg K} \\ k &= \frac{c_p}{c_v} = \frac{4157}{3464} = 1,2 \\ \frac{P_2}{P_1} &= \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \rightarrow P_2 = P_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}} = 15 \left(\frac{1350}{2500}\right)^{\frac{1,2}{1,2-1}} \\ P_2 &= 0,372 [ATM]\end{aligned}$$

EXEMPLO

Ar expande adiabaticamente numa turbina da pressão de 10[bar] e 900[K] para pressão atmosférica de 1[bar]. Se a mudança de temperatura real é 80% da temperatura ideal, determine: a) Temperatura real do ar expandido; b) Entalpia após a expansão; c) Entropia após a expansão.

■ SOLUÇÃO

- a) Vamos inicialmente calcular a temperatura após o processo de expansão isoentrópica. Assim:

$$\begin{aligned}\frac{T_{2s}}{T_1} &= \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} \\ \frac{T_{2s}}{T_1} &= \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1,4-1}{1,4}} \\ \frac{T_{2s}}{900} &= 0,5179 \\ T_{2s} &= 466,15[K]\end{aligned}$$

Dessa forma, a variação de temperatura é de $T_1 - T_{2s} = 900 - 466,15 = 433,84[K]$.

No enunciado foi informado que a variação real é 80% da variação isoentrópica. Isso ocorre pois no processo real há aumento da entropia e consequentemente aumento da temperatura após a expansão. Assim:

$$\begin{aligned}\Delta T_r &= 0,8\Delta T_s \\ \Delta T_r &= 0,8 \times 433,84 = 347,1[K]\end{aligned}$$

A temperatura real após a expansão será de:

$$\begin{aligned}\Delta T_r &= T_1 - T_{2r} \\ 347,1 &= 900 - T_{2r} \\ T_{2r} &= 552,92[K]\end{aligned}$$

Os processo de expansão isoentrópica e real podem ser representados à partir da equação da variação da entropia para gases ideais, considerando uma temperatura e pressão de referências ($T_{ref} = 300[K]$ e $P_{ref} = 1[bar]$). Podemos obter o gráfico da expansão isoentrópica $1 \rightarrow 2_s$ e a expansão real $1 \rightarrow 2_r$:

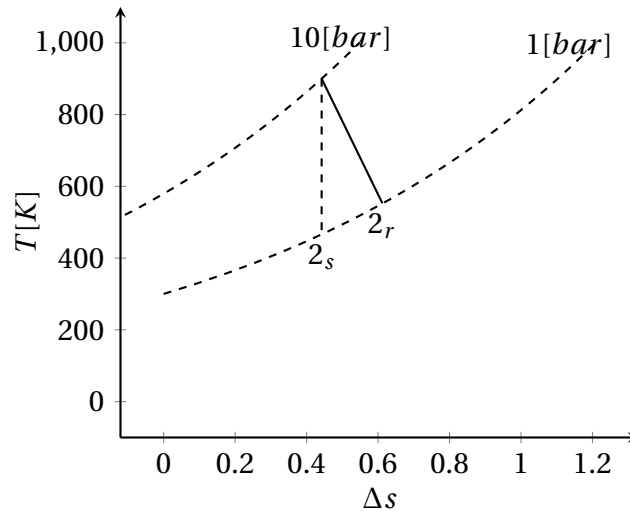


Figura 3.1 – Diagrama Temperatura-entropia obtido com a equação $\Delta s = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$ para o ar, com $c_p = 1,004 \left[\frac{KJ}{kg.K} \right]$ e $R = 0,287 \left[\frac{KJ}{kg.K} \right]$. A expansão isoentrópica ocorre de $1 \rightarrow 2_s$ enquanto na expansão real de $1 \rightarrow 2_r$ ocorre aumento de entropia e consequentemente aumento da temperatura real após a expansão.

b) A entalpia na saída pode ser obtida por:

$$h_{2r} = c_p \cdot T_{2r}$$

$$h_{2r} = 1,004 \times 552,92 = 555,14 [KJ/Kg]$$

c) Não é possível obter a entropia na saída, mas sim a variação da entropia no processo de expansão. Podemos utilizar a variação entre os estados 1 e 2_r ou entre 2_s e 2_r :

$$\Delta s_{1 \rightarrow 2} = 1,004 \left[\frac{KJ}{kg.K} \right] \ln\left(\frac{552,92}{900}\right) - 0,287 \left[\frac{KJ}{kg.K} \right] \ln\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$\Delta s_{1 \rightarrow 2} = 0,17 \left[\frac{KJ}{kg.K} \right]$$

ou

$$\Delta s_{2s \rightarrow 2r} = 1,004 \left[\frac{KJ}{kg.K} \right] \ln\left(\frac{552,92}{466,15}\right) - 0,287 \left[\frac{KJ}{kg.K} \right] \ln\left(\frac{1}{1}\right)$$

$$\Delta s_{2s \rightarrow 2r} = 0,17 \left[\frac{KJ}{kg.K} \right]$$

EXEMPLO

Considere que 10[Kg] de ar a 20[°C] e 95[KPa] é comprimido isoentropicamente para 50% de seu volume inicial. Determine: a) as temperatura e pressão finais, b) as mudanças de energia interna e entalpia e c) o trabalho necessário

■ SOLUÇÃO

- a) Da equação dos gases ideais, obtemos o volume específico inicial:

$$\begin{aligned} P_1 \cdot v_1 &= R \cdot T_1 \\ v_1 &= \frac{287[KJ/kg \cdot K \cdot 293,15][K]}{95 \cdot 10^3[Pa]} \\ v_1 &= 0,8856[M^3/Kg] \end{aligned}$$

Como o sistema é fechado, a massa é constante, podemos agora obter o volume específico final:

$$v_2 = 0,5 \cdot v_1 = 0,4428[m^3/kg]$$

Das equações isoentrópicas para gases ideais é possível determinar as temperatura e pressão finais:

$$\begin{aligned} \frac{T_2}{T_1} &= \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{1-k} \\ \frac{T_2}{T_1} &= (0,5)^{1-1,4} = 1,3195 \\ T_2 &= 386,81[K] \\ \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} &= \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{1-k} \\ \frac{P_2}{P_1} &= \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{(1-k) \cdot k/(k-1)} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{-k} \\ \frac{P_2}{P_1} &= 0,5^{-1,4} = 2,639 \\ P_2 &= 250,70[KPa] \end{aligned}$$

- b) As variações de energia interna e entalpia específicas são:

$$du = c_v \cdot dT = 0,7187[KJ/kg \cdot K] \cdot (386,81 - 293,15)[K] = 67,16[KJ/kg]$$

$$dh = c_p \cdot dT = 1,004[KJ/kg \cdot K] \cdot (386,81 - 293,15)[K] = 94,04[KJ/kg]$$

As mudanças totais de energia interna e entalpia dependem da massa total do sistema. Assim:

$$dU = m \cdot du = 671,7[KJ]$$

e

$$dH = m \cdot dh = 940,4[KJ]$$

- c) Para sistema fechado, o trabalho é dado pela variação da energia interna dU . Uma outra forma de avaliar é considerando um processo politrópico, em que $P \cdot v^n = \text{constante}$. Assim:

$$\begin{aligned} P_1 \cdot v_1^n &= P_2 \cdot v_2^n \\ \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^n &= \frac{P_1}{P_2} \\ n &= \frac{\ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)}{\ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)} \\ n &= 1,4 \end{aligned}$$

O trabalho para um processo politrópico é:

$$w = - \left(\frac{P_2 \cdot v_2^n - P_1 \cdot v_1^n}{1 - n} \right)$$

$$w = - \left(\frac{250,7[KPa] \cdot 0,4428[m^3/kg] - 95[KPa] \cdot 0,8856[m^3/kg]}{1 - 1,4} \right)$$

$$w = +67,19[KJ/kg]$$

E o trabalho total é $W = 671,9[KJ]$

■ CONSIDERAÇÕES

Para gases ideais, as variações de energia interna e entalpia dependem apenas da temperatura. Como o sistema é fechado, o trabalho é equivalente à variação de energia interna. A pequena diferença entre os valores obtidos é relacionada aos valores considerados para os calores específicos c_p e c_v .

O valor positivo obtido no trabalho pelo processo politrópico indica que é um trabalho realizado pela vizinhança no sistema, dessa forma aumentando a energia do sistema.

Formulação integral

Neste capítulo será apresentada a formulação integral dos três princípios físicos fundamentais:

1. Conservação de Massa
Equação da Continuidade
2. Quantidade de movimento
2ª Lei de Newton
3. Conservação da energia
1ª Lei da Termodinâmica

Em breve...

A velocidade do som e o cone de Mach

Considere o ar à sua volta. Ele é composto por moléculas se movendo aleatoriamente. Pode-se definir, num intervalo de tempo, a velocidade molecular média e a energia média que, para gases, são função apenas da temperatura.

Se ocorre uma explosão, a energia liberada será absorvida pelas moléculas de ar vizinhas, aumentando sua velocidade molecular média, o que irá aumentar a colisão entre moléculas, promovendo a transferência de parte da energia absorvida. Essa onda de energia viaja no espaço a uma velocidade que deve ser, de alguma forma, relacionada à velocidade molecular média. Através dessa onda, ocorre aumento de energia e mudanças nas propriedades, pressão, massa específica, temperatura, etc.

A passagem dessa onda, e a consequente variação na pressão, são percebidas pelo ser humano como som. Por definição, a onda de som é uma onda fraca. Se as mudanças através da onda são "fortes", ocorre uma onda de choque, que se propaga mais rápido do que a velocidade do som.

5.1 A velocidade do som

A velocidade do som (c) para um gás perfeito é uma das propriedades mais importantes no estudo de escoamentos compressíveis.

Consideremos que a onda de som se move à velocidade c no gás. Vamos nos fixar na frente de onda e nos movimentarmos com ela.

(1)		(2)
c		$c + \partial c$
P		$P + \partial P$
ρ		$\rho + \partial \rho$
T		$T + \partial T$

Frente de onda

Figura 5.1 – Uma frente de onda se movimentando com velocidade c da direita para a esquerda

Vamos visualizar a frente de onda parada, e o escoamento se movendo em direção à frente de onda, da esquerda para a direita, com velocidade c , ρ , P , T . O escoamento se afasta da frente de onda com propriedades $c + \partial c$, $\rho + \partial \rho$, $P + \partial P$, $T + \partial T$.

Considerando escoamento unidimensional. Da conservação de massa, temos:

$$\begin{aligned}\rho_1 \cdot V_1 &= \rho_2 \cdot V_2 \\ \rho \cdot c &= (\rho + \partial\rho) \cdot (c + \partial c) \\ \rho \cdot c &= \rho \cdot c + \rho \cdot \partial c + \partial\rho \cdot c + \partial\rho \cdot \partial c\end{aligned}$$

O termo $\partial\rho \cdot \partial c$ é o produto de duas quantidades infinitesimais (2ª ordem), e será desprezado. Assim:

$$\rho \cdot \partial c + c \cdot \partial\rho = 0$$

$$\boxed{c = -\rho \cdot \frac{\partial c}{\partial \rho}} \quad (5.1)$$

Da equação da quantidade de movimento:

$$\begin{aligned}P_1 + \rho_1 \cdot V_1^2 &= P_2 + \rho_2 \cdot V_2^2 \\ P + \rho \cdot c^2 &= (P + \partial P) + (\rho + \partial\rho) \cdot (c + \partial c)^2 \\ P + \rho \cdot c^2 &= P + \partial P + (\rho + \partial\rho) \cdot (c^2 + 2 \cdot c \cdot \partial c + \partial c^2) \\ P + \rho \cdot c^2 &= P + \partial P + \rho \cdot c^2 + 2 \cdot c \cdot \partial c \cdot \rho + \rho \cdot \partial c^2 + \partial\rho \cdot c^2 + 2 \cdot c \cdot \partial\rho \cdot \partial c + \partial\rho \cdot \partial c^2\end{aligned}$$

Desprezando os termos de 2ª ordem: $(\partial c)^2$ e $(\partial c \cdot \partial\rho)$:

$$\begin{aligned}\partial P + 2 \cdot c \cdot \rho \cdot \partial c + c^2 \cdot \partial\rho &= 0 \\ \partial c &= \frac{\partial P + c^2 \cdot \partial\rho}{-2 \cdot c \cdot \rho}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial c}{\partial \rho} = \frac{\frac{\partial P}{\partial \rho} + c^2}{-2 \cdot c \cdot \rho}} \quad (5.2)$$

Substituindo esse resultado na Eq.(5.1):

$$\begin{aligned}c &= -\rho \cdot \frac{\partial c}{\partial \rho} \\ c &= -\rho \cdot \left[\frac{\frac{\partial P}{\partial \rho} + c^2}{-2 \cdot c \cdot \rho} \right] \\ -\frac{c}{\rho} &= \frac{\frac{\partial P}{\partial \rho} + c^2}{-2 \cdot c \cdot \rho} \\ \frac{\partial P}{\partial \rho} + c^2 &= \frac{2 \cdot c \cdot \rho \cdot c}{\rho} \\ \frac{\partial P}{\partial \rho} + c^2 &= 2 \cdot c^2\end{aligned}$$

$$\boxed{c^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho}} \quad (5.3)$$

As mudanças na onda sonora são pequenas, o que implica gradientes no escoamento pequenos. Assim, efeitos dissipativos podem ser desprezados (atrito e condutividade térmica). Para um processo isoentrópico:

$$c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s \quad (5.4)$$

A Eq.(5.4) é a equação fundamental para a velocidade do som, e demonstra que é uma medição direta da compressibilidade do gás $\frac{dP}{d\rho}$. Aplicando as equações isoentrópicas para gases ideais:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{1-k} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{k-1}$$

Relacionando a pressão com a massa específica, temos:

$$\begin{aligned} \frac{P_2}{P_1} &= \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{(k-1) \cdot \frac{k}{k-1}} \\ \frac{P_2}{P_1} &= \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^k \\ \left(\frac{P}{\rho^k} \right) &= \text{constante} \\ P &= \text{constante} \cdot \rho^k \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_s &= \frac{d}{d\rho} (\text{constante} \cdot \rho^k) \\ \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_s &= k \cdot \text{constante} \cdot \rho^{k-1} \end{aligned}$$

Mas $\text{constante} = \frac{P}{\rho^k}$, logo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_s &= k \cdot \left(\frac{P}{\rho^k} \right) \cdot \rho^{k-1} \\ \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_s &= \frac{k \cdot P}{\rho} \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} c^2 &= \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s \\ c^2 &= \frac{k \cdot P}{\rho} \end{aligned}$$

$$c = \sqrt{\frac{k \cdot P}{\rho}} \quad (5.5)$$

Da equação dos gases ideais: $P = \rho \cdot R \cdot T \rightarrow \frac{P}{\rho} = R \cdot T$

$$c = \sqrt{k \cdot R \cdot T} \quad (5.6)$$

O som viaja mais rápido no inverno ou no verão? Por que?

■ SOLUÇÃO

Da Eq.(5.6) temos que a velocidade do som é diretamente proporcional à temperatura. Dessa forma, no verão, com temperaturas médias maiores, a velocidade do som também será maior.

Como exemplo vamos calcular a variação na velocidade do som no ar se a temperatura aumentar de $20[^\circ\text{C}]$ para $25[^\circ\text{C}]$:

$$c_1 = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot (20 + 273,15)} = 343,2[m/s]$$

$$c_2 = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot (25 + 273,15)} = 346,12[m/s]$$

Assim, uma variação de $5[^\circ\text{C}]$ implica numa variação na velocidade do som de $2,9[m/s]$.

EXEMPLO

Determine a velocidade sônica do ar na atmosfera nas altitudes de $10[\text{km}]$, $50[\text{km}]$ e $80[\text{km}]$

■ SOLUÇÃO

A atmosfera é dividida entre a Troposfera, em que a temperatura diminui com o aumento da altitude, até aproximadamente $10[\text{km}]$, Estratosfera ($10[\text{km}] \approx h \approx 50[\text{km}]$), em que a temperatura aumenta com a altitude, Mesosfera ($50[\text{km}] \approx h \approx 80[\text{km}]$), em que a temperatura diminui com a altitude e Termosfera ($80[\text{km}] \approx h \approx 100[\text{km}]$), em que a temperatura aumenta com a altitude.

Assim:

$h[\text{km}]$	$T[^\circ\text{C}]$	$T[\text{K}]$	$c[\text{m/s}]$
10	-55	218,15	296,06
50	-5	268,15	328,14
80	-90	183,15	271,27

■ CONSIDERAÇÕES

No cálculo da velocidade do som a temperatura deve ser sempre convertida para a escala absoluta de Kelvin.

5.1.1 O número de Mach

O número de Mach é definido como a razão entre a velocidade pela velocidade do som no meio: $M = \frac{V}{c}$. Se dividirmos a parcela da energia cinética pela parcela da energia interna $u = c_v \cdot T$, temos:

$$\frac{\frac{V^2}{2}}{u} = \frac{\frac{V^2}{2}}{c_v \cdot T} \quad (5.7)$$

$$\text{Mas: } R = c_p - c_v \rightarrow \frac{R}{c_v} = \frac{c_p}{c_v} - \frac{c_v}{c_v} \rightarrow \frac{R}{c_v} = k - 1 \rightarrow c_v = \frac{R}{k-1}$$

$$\frac{\frac{V^2}{2}}{c_v \cdot T} = \frac{\frac{V^2}{2}}{\frac{R}{k-1} \cdot T} \quad (5.8)$$

e

$$c = \sqrt{k \cdot R \cdot T} \rightarrow c^2 = k \cdot R \cdot T \rightarrow R \cdot T = \frac{c^2}{k} \quad (5.9)$$

logo:

$$\frac{\frac{V^2}{2}}{\frac{R}{k-1} \cdot T} = \frac{\frac{V^2}{2}}{\frac{c^2}{k(k-1)}} = \frac{V^2}{2 \cdot c^2} \cdot k \cdot (k-1) = \frac{k \cdot (k-1)}{2} \cdot M^2 \quad (5.10)$$

Portanto:

$$\boxed{\frac{\frac{V^2}{2}}{u} = \frac{k \cdot (k-1)}{2} \cdot M^2} \quad (5.11)$$

A Eq.(5.11) demonstra que Mach ao quadrado é proporcional à razão entre as energia cinética e interna, ou seja, é uma medida no movimento do gás comparado com o movimento aleatório térmico das moléculas do gás.

$$\boxed{M^2 \propto \frac{k_e}{u}} \quad (5.12)$$

EXEMPLO

Determine o número de Mach para um veículo se movimentando, no Ar e no Hélio, às velocidades de 50[km/h], 150[km/h] e 1500[km/h]. Considere temperatura ambiente de 10[°C].

■ SOLUÇÃO

Para o ar, $k = 1,4$ e $R = 287[J/kg.K]$, enquanto para o Hélio $k = 1,667$ e $R = 2077,1[J/kg.K]$. Assim:

	Ar	Hélio
c	$\sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot (20 + 273,15)} = 343,2[m/s]$	$\sqrt{1,667 \cdot 2077,1 \cdot (20 + 273,15)} = 1007,47[m/s]$
V[km/h]	M	M
50	0,04	0,014
150	0,12	0,041
1500	1,21	0,41

■ CONSIDERAÇÕES

As velocidades devem ser convertidas para [m/s] e as temperaturas no cálculo da velocidade do som para Kelvin. Para a mesma velocidade de deslocamento, o número de Mach depende das propriedades do gás.

5.2 O cone de Mach

Considere um objeto fixo emitindo ondas sonoras em intervalos regulares. Para um intervalo de tempo dt , a onda irá percorrer uma distância $s = c \cdot dt$. Para o segundo intervalo de tempo, essa mesma onda irá percorrer a distância $s = c \cdot (2 \cdot dt)$, e assim sucessivamente.

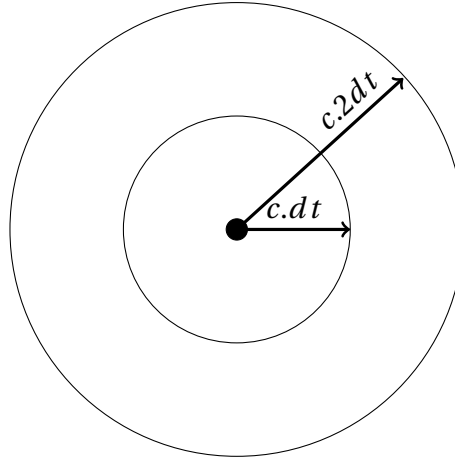


Figura 5.2 – Ondas sonoras emitidas em intervalos regulares se distanciam da fonte de emissão estacionária

Se a fonte sonora se move, existem três casos possíveis:

- Caso 1: $M < 1$:

Se o objeto que emite a onda sonora se move à velocidade menor do que a do som ($M < 1$), ele irá se aproximar da frente de onda na direção de seu deslocamento e se afastar da frente de onda na direção contrária ao seu movimento. Dessa forma haverá uma maior frequência de ondas no sentido de seu movimento, resultando no efeito Doppler. Ouvimos uma maior frequência quando o objeto se aproxima e uma menor quando ele se afasta de nós.

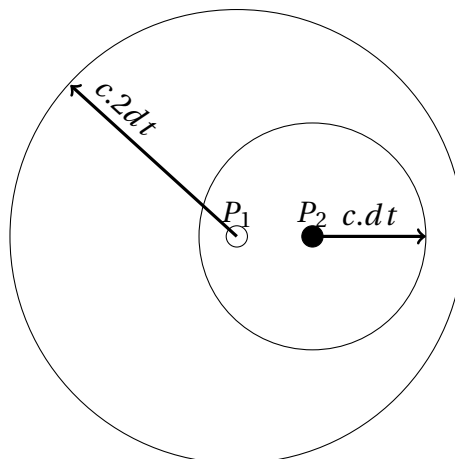


Figura 5.3 – Objeto se move para a direita com $M < 1$. A onda sonora maior foi emitida quando o objeto estava na posição P_1 , no instante de tempo t_0 . Após N intervalos de tempo dt ela percorre uma distância $N \cdot dt$. Após o primeiro intervalo de tempo uma segunda onda sonora é emitida, mas o objeto se moveu para a direita (posição P_2), resultando em maior frequência das ondas sonoras no sentido de seu movimento

- Caso 2: $M = 1$

Se o objeto se move com a mesma velocidade que a onda sonora ($M = 1$), ele estará posicionado na frente de onda.

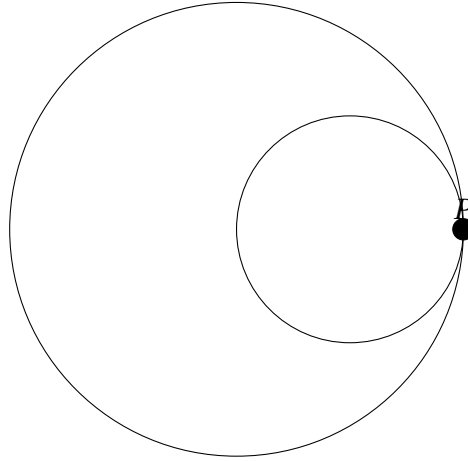


Figura 5.4 – A fonte sonora P se move para a direita com $M = 1$. A onda sonora maior foi emitida no instante de tempo t_0 . Após o primeiro intervalo de tempo a segunda onda sonora é emitida, mas o objeto se moveu para a direita com a mesma velocidade que a onda sonora.

- Caso 3: $M > 1$

Se a fonte sonora se move mais rápido do que a velocidade do som, ele estará posicionado à frente das ondas que ele emite. As ondas sonoras estarão contidas em um cone atrás do objeto, o cone de Mach.

Só se pode ouvir a fonte sonora dentro do cone de Mach, que é o local em que todas as ondas sonoras estão presentes. Essa região também é conhecida como zona de ação. Fora do cone, há uma zona de silêncio (não é possível ouvir a fonte sonora).

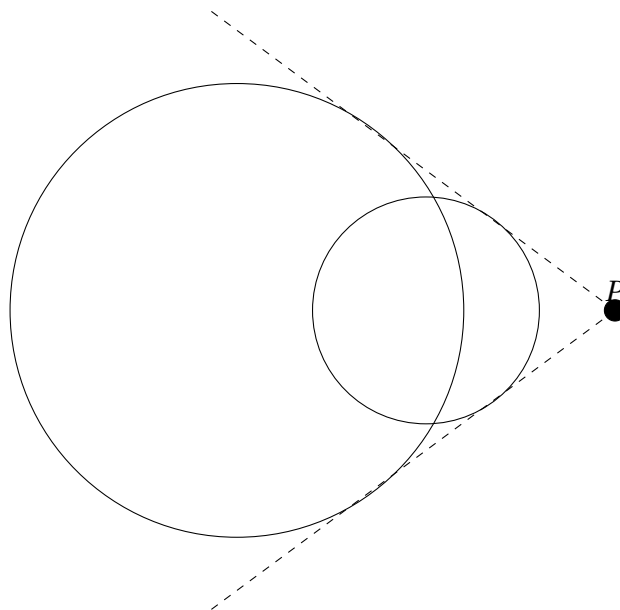


Figura 5.5 – A fonte sonora P se move para a direita com $M > 1$. O objeto fica à frente das ondas sonoras, formando uma região conhecida como cone de Mach, zona em que é possível ouvir a fonte sonora. Fora do cone existe uma zona de silêncio.

O ângulo de Mach define a geometria do cone de Mach. Após um intervalo de tempo Δt a fonte sonora se moveu uma distância $v.\Delta t$ enquanto a onda sonora se moveu pela distância $c.\Delta t$. Assim:

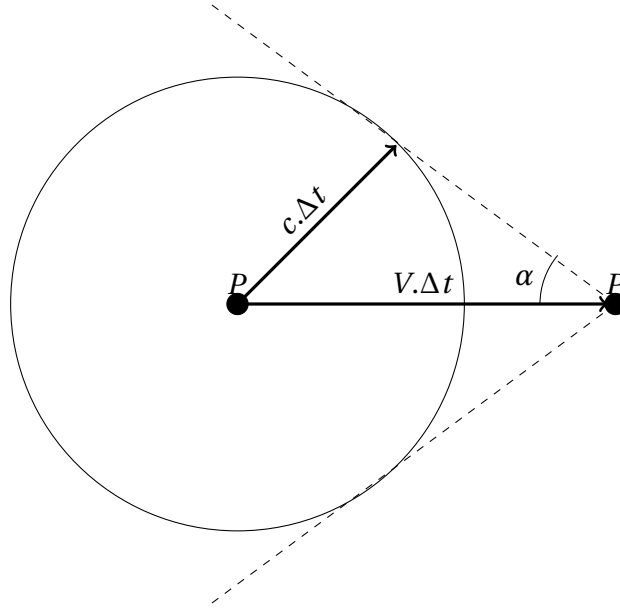


Figura 5.6 – O ângulo α define o cone de Mach

$$\sin \alpha = \frac{c.\Delta t}{v.\Delta t}$$

$$\sin \alpha = \frac{c}{v} = \frac{1}{M}$$

$$\boxed{\alpha = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{M}\right)} \quad (5.13)$$

Escoamento Isoentrópico Unidimensional

6.1 Fundamentos de escoamento compressível unidimensional

Escoamento unidimensional em regime permanente isoentrópico é uma simplificação útil para escoamentos em dutos e em tubos de corrente. As equações obtidas são simples e permitem cálculos rápidos para uma grande variedade de problemas de engenharia.

No caso de dutos adiabáticos pequenos, como em bocais e difusores, a aproximação para processo reversível é útil para determinar a eficiência de bocais e difusores reais. Escoamentos fora da camada limite também possuem efeitos dissipativos desprezíveis, o que torna as equações isoentrópicas úteis nesses escoamentos.

O escoamento pode ser aproximado como unidimensional quando a taxa de variação das propriedades na direção normal às linhas de corrente são desprezíveis quando comparadas com a taxa de variação na direção da linha de corrente. As seguintes situações podem ser analisadas:

- Escoamentos em bocais e difusores
- Ondas de choque normais
- Escoamento com adição de calor
- Escoamento com atrito

Considere um escoamento unidimensional permanente entre os pontos 1 e 2. Aplicando a primeira lei da termodinâmica entre esses dois pontos, temos:

$$dE = \delta Q + \delta W \quad (6.1)$$

Podemos escrever a equação da energia em termos de suas parcelas intensivas (pois a taxa mássica é a mesma entre os pontos):

$$de = \delta q + \delta w \quad (6.2)$$

Considerando o escoamento adiabático e sem realização de trabalho, temos:

$$de = 0 \quad (6.3)$$

Os termos de energia são: entalpia (que envolve a energia interna mais o trabalho de fluxo), cinética e potencial. Desprezando o termo de energia potencial:

$$\begin{aligned}
 de &= dh + de_K = 0 \\
 h_2 - h_1 + \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} &= 0 \\
 h_2 + \frac{V_2^2}{2} &= h_1 + \frac{V_1^2}{2}
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

6.2 Condição de estagnação

Vamos imaginar que o ponto 1 será desacelerado isoentropicamente para velocidade nula. Nessa condição estagnada, podemos obter a temperatura, pressão e massa específica de estagnação, que são associadas ao elemento de fluido enquanto ele de fato se movimenta à velocidade $\vec{V}$, com pressão P e temperatura T , chamadas de pressão e temperatura estática, respectivamente. Assim, considerando o ponto 2 como a condição imaginária de velocidade nula:

$$\begin{aligned}
 h_2 + \frac{V_2^2}{2} &= h_1 + \frac{V_1^2}{2} \\
 h_2 &= h_1 + \frac{V_1^2}{2} \\
 h_0 &= h_1 + \frac{V_1^2}{2}
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

O ponto estagnado será representado pelo subíndice 'o'.

A entalpia de estagnação é a entalpia obtida quando o escoamento é levado à velocidade nula sem adição ou remoção de calor. Fisicamente nós não temos o "feeling" do que representa a entalpia de estagnação, mas podemos relacioná-la à temperatura de estagnação. Para gases ideais, sabemos que a entalpia pode ser calculada em função do calor específico e da temperatura:

$$\begin{aligned}
 c_P T_0 &= c_P T_1 + \frac{V_1^2}{2} \\
 T_0 &= T_1 + \frac{V_1^2}{2 \cdot c_P}
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

A Eq.(6.6) fornece a temperatura de estagnação para o ponto. Ela representa o aumento de temperatura devido à conversão de energia cinética em energia térmica.

EXEMPLO

Demonstre que a temperatura de estagnação é constante para um escoamento isoentrópico

■ SOLUÇÃO

Um escoamento isoentrópico é adiabático e reversível. Assim, não há troca de calor. Considerando um escoamento entre dois pontos 1 e 2 sem realização de trabalho de eixo, temos:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2}$$

Mas, da definição da entalpia de estagnação:

$$h_o = h + \frac{V^2}{2}$$

Assim:

$$\begin{aligned} h_{o1} &= h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = h_{o2} \\ h_{o1} &= h_{o2} \\ c_P \cdot T_{o1} &= c_P \cdot T_{o2} \\ T_{o1} &= T_{o2} \end{aligned}$$

A velocidade é:

$$V_1 = \sqrt{2 \cdot c_P (T_o - T_1)} \quad (6.7)$$

Observamos que para $T_1 = 0$ a velocidade é máxima e igual a $V_{max} = \sqrt{2 \cdot c_P \cdot T_o}$. Uma outra velocidade útil é a velocidade do som na temperatura de estagnação:

$$c_o = \sqrt{k \cdot R \cdot T_o} \quad (6.8)$$

A razão entre a temperatura de estagnação e a estática é:

$$\frac{T_o}{T_1} = 1 + \frac{V_1^2}{2 \cdot c_P \cdot T_1} \quad (6.9)$$

Para escoamentos compressíveis, é útil representar a Eq.(6.9) em função do número de Mach. Sabemos que:

$$\begin{aligned} M &= \frac{V}{c} = \frac{V}{\sqrt{[k \cdot R \cdot T]}} \\ V &= M \cdot \sqrt{k \cdot R \cdot T} \end{aligned}$$

Substituindo na Eq.(6.9):

$$\begin{aligned} \frac{T_o}{T_1} &= 1 + \frac{V_1^2}{2 \cdot c_P \cdot T_1} \\ \frac{T_o}{T_1} &= 1 + \frac{(M \cdot \sqrt{k \cdot R \cdot T_1})^2}{2 \cdot c_P \cdot T_1} \\ \frac{T_o}{T_1} &= 1 + \frac{M^2 \cdot k \cdot R \cdot T_1}{2 \cdot c_P \cdot T_1} \\ \frac{T_o}{T_1} &= 1 + \frac{k \cdot R}{2 \cdot c_P} \cdot M^2 \end{aligned}$$

O termo $\frac{k \cdot R}{c_P}$ pode ser reescrito como:

$$\frac{k \cdot R}{c_P} = \frac{k \cdot (c_P - c_v)}{c_P} = k \left(\frac{c_P}{c_P} - \frac{c_v}{c_P} \right) = k \left(1 - \frac{1}{k} \right) = k \left(\frac{k-1}{k} \right) = k-1$$

Substituindo:

$$\boxed{\frac{T_o}{T_1} = 1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2} \quad (6.10)$$

Das equações isoentrópicas para gases ideais, temos:

$$\frac{T_0}{T_1} = \left(\frac{P_0}{P_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{k-1}$$

Assim:

$$\frac{P_0}{P} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\boxed{\frac{P_0}{P} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}} \quad (6.11)$$

e

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{1}{k-1}}$$

$$\boxed{\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}} \quad (6.12)$$

Sabemos que a velocidade do som é $c = \sqrt{k.R.T}$ e a velocidade do som de estagnação é $c_0 = \sqrt{k.R.T_0}$. Assim:

$$\frac{c_0}{c} = \frac{\sqrt{k.R.T_0}}{\sqrt{k.R.T}} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Logo:

$$\boxed{\frac{c_0}{c} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (6.13)$$

A pressão de estagnação é importante para calcular arrasto e carregamento estrutural.

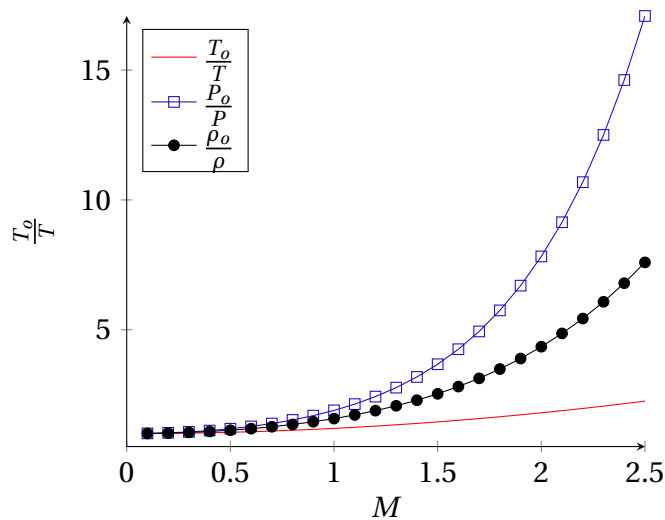


Figura 6.1 – Razão entre propriedades de estagnação e estáticas em função do número de Mach para o ar ($k=1,4$)

Considere um veículo se movimentando num local em que a pressão atmosférica é de 1atm e a temperatura é de 25[°C]. Determine as propriedades de estagnação se sua velocidade for: a) 100Km/h; b) 500 Km/h; c) 1000Km/h

■ SOLUÇÃO

Inicialmente vamos determinar a massa específica do fluido e a velocidade do som no ambiente. Considerando o ar como fluido: $k = 1,4$ e $R = 287 \text{ J/Kg.K}$. Da equação dos gases ideais, obtemos a massa específica do fluido:

$$P = \rho \cdot R \cdot T$$

$$\rho = \frac{1[\text{atm}] \cdot \frac{101,325[\text{KPa}]}{\text{atm}}}{0,287[\text{KJ/Kg.K}] \cdot (25 + 273,15)[\text{K}]}$$

$$\rho = 1,1841[\text{kg/m}^3]$$

Devemos obter também a velocidade do som no meio:

$$c = \sqrt{k \cdot R \cdot T}$$

$$c = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot (25 + 273,15)}$$

$$c = 346,12[\text{m/s}]$$

Para cada velocidade, podemos agora determinar o número de Mach e com as Eqs. 6.9, 6.11 e 6.12, calcular as propriedades de estagnação. Assim:

v[km/h]	v[m/s]	M	$\frac{T_0}{T}$	$T_0[\text{K}]$	$\frac{P_0}{P}$	$P_0[\text{atm}]$	$\frac{\rho_0}{\rho}$	$\rho_0[\text{Kg/m}^3]$
100	27,78	0,08	1,0013	298,53	1,0045	1,0045	1,0032	1,1879
500	138,89	0,4	1,032	307,75	1,1173	1,1173	1,0825	1,2817
1000	278,78	0,8	1,13	336,56	1,5282	1,5282	1,3538	1,6030

■ CONSIDERAÇÕES

Na equação dos gases ideais a temperatura deve ser convertida para Kelvin e a constante do gás R deve ter unidades consistentes, especialmente com a pressão. No caso, utilizando a pressão em [KPa], R deve ter unidades de [KJ/Kg.K]. Para a determinação da pressão de estagnação o valor pode ser mantido em atm nos cálculos, pois o fator de conversão para [Pa] é multiplicativo. No caso da temperatura o fator de conversão é uma somatória, por isso sempre deve ser convertida para a escala absoluta.

6.3 As condições características

Uma outra condição importante para o estudo de escoamentos compressíveis é a condição sônica, em que $M = 1$. Essa condição é chamada de condição característica (ou condição crítica), e suas propriedades são representadas pelo superscrito "*".

As equações características podem ser relacionadas com as condições de estagnação, bastando para isso substituir Mach nas Eqs. 6.10, 6.11 e 6.12:

$$\frac{T_0}{T^*} = 1 + \frac{k-1}{2} = \frac{2+k-1}{2} = \frac{k+1}{2}$$

Assim:

$$\boxed{\frac{T_0}{T^*} = \frac{k+1}{2}} \quad (6.14)$$

$$\boxed{\frac{P_0}{P^*} = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{k}{k-1}}} \quad (6.15)$$

$$\boxed{\frac{\rho_0}{\rho^*} = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}}} \quad (6.16)$$

Para o ar, $k = 1,4$:

$$\begin{aligned} \frac{T_0}{T^*} &= \frac{1,4+1}{2} = 1,2 \\ \frac{P_0}{P^*} &= \left(1 + \frac{1,4-1}{2} \cdot (1)^2 \right)^{\frac{1,4}{1,4-1}} = 1,8929 \\ \frac{\rho_0}{\rho^*} &= \left(1 + \frac{1,4-1}{2} \cdot (1)^2 \right)^{\frac{1,0}{1,4-1}} = 1,5774 \end{aligned}$$

Esse valor indica que o ar deve ser armazenado a aproximadamente 2 vezes a pressão atmosférica para que possa atingir a velocidade sônica quando é liberado para a atmosfera.

EXEMPLO

O escoamento de ar entrando no bocal vindo do combustor tem pressão estática de 100KPa e $M=2$. O bocal então expande o escoamento de forma que a pressão estática caia para 20KPa na saída. Calcule a pressão de estagnação e o número de Mach na saída.

■ SOLUÇÃO

$$\begin{aligned} \frac{P_0}{P} &= \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \\ \frac{P_0}{100[KPa]} &= \left(1 + \frac{1,4-1}{2} 2^2 \right)^{\frac{1,4}{1,4-1}} \\ P_0 &= 782,44[KPa] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{P_0}{P} &= \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \\ \left(\frac{P_0}{P} \right)^{\frac{k-1}{k}} &= 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \\ M^2 &= \frac{\left(\frac{P_0}{P} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1}{\frac{k-1}{2}} \\ M^2 &= \frac{\left(\frac{782,44}{20} \right)^{\frac{1,4-1}{1,4}} - 1}{\frac{1,4-1}{2}} \\ M &= 3,04 \end{aligned}$$

Escoamento compressível com mudança de área

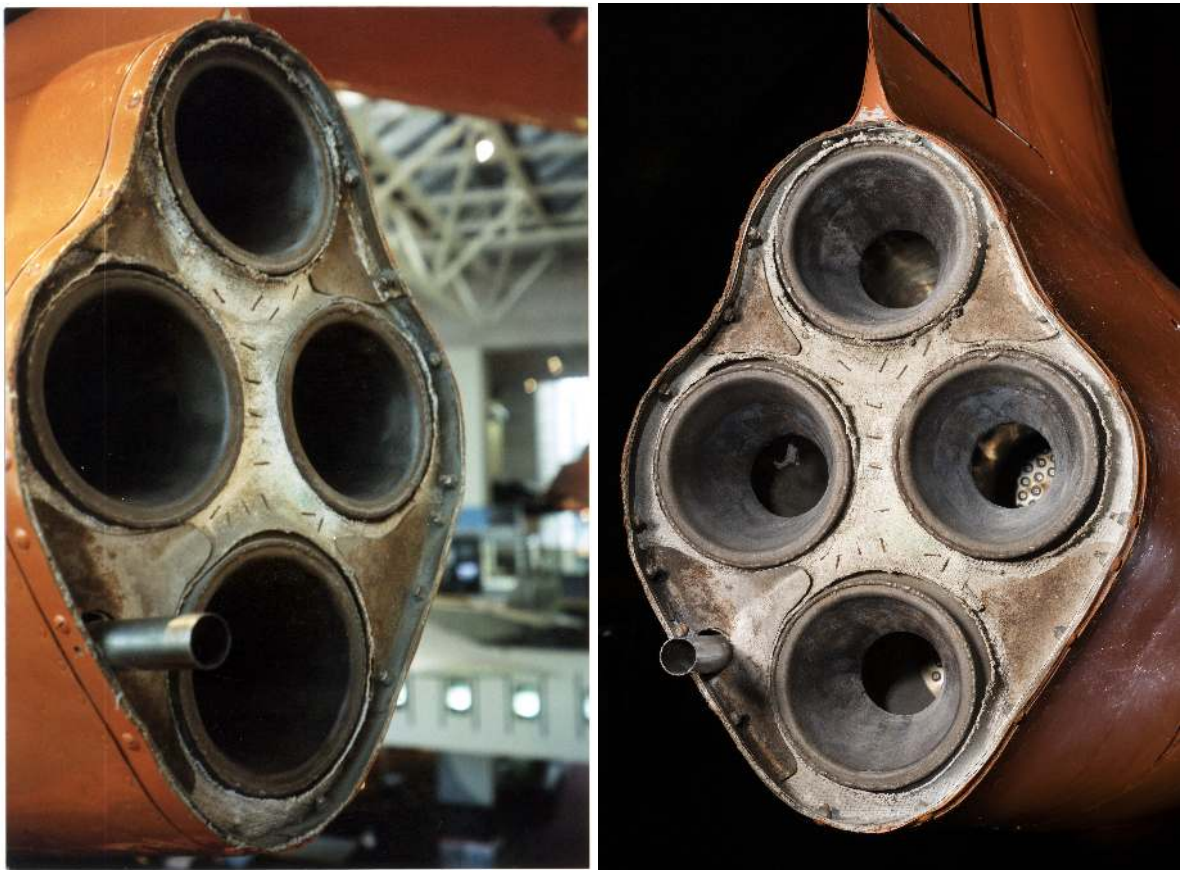


Figura 7.1 – A aeronave Bell X-1 utilizou um motor a foguete com propelente líquido da Reaction Motors, Inc, gerando 6000lbf de empuxo. Fonte: <https://airandspace.si.edu/collection-objects/bell-x-1-glamorous-glennis/nasm_A19510007000>

Vimos como as propriedades do escoamento variam quando ele é levado à condição de estagnação ou o oposto, quando, partindo da condição de estagnação, é acelerado (no caso de reservatórios pressurizados em que se permite a expansão livre).

Se quisermos controlar o escoamento, com o intuito de maximizar o empuxo gerado pela exaustão, devemos fazer o uso de bocais.

O escoamento em bocais é um escoamento com mudança de área. Entretanto, vamos considerar uma mudança gradual, o que permite tratar o escoamento como quase-unidimensional, ou seja, as propriedades variam na direção do escoamento somente.

O objetivo do bocal é o de converter energia térmica, da saída do combustor, em energia cinética, o que resulta em maior empuxo gerado.

Para a análise de bocais, vamos considerar:

1. Mudança gradual da área: o perfil de velocidade é uniforme e varia na direção do escoamento somente
2. desprezar efeitos viscosos
3. isentrópico (sem onda de choque)
4. regime permanente

Da equação da conservação de massa, temos:

$$\dot{m} = \rho \cdot V \cdot A = \text{constante} \quad (7.1)$$

Diferenciando a equação:

$$V \cdot A \cdot d\rho + \rho \cdot A \cdot dV + \rho \cdot V \cdot dA = 0 \quad (7.2)$$

Dividindo pela taxa mássica $\dot{m}$:

$$\begin{aligned} \frac{V \cdot A \cdot d\rho}{\rho \cdot V \cdot A} + \frac{\rho \cdot A \cdot dV}{\rho \cdot V \cdot A} + \frac{\rho \cdot V \cdot dA}{\rho \cdot V \cdot A} &= 0 \\ \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} &= 0 \end{aligned} \quad (7.3)$$

Cada termo da Eq.(7.3) é um termo de dilatação, ou seja, representa a variação da propriedade. Para escoamento incompressível $d\rho = 0$, portanto:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} &= 0 \\ \boxed{\frac{dV}{V} = -\frac{dA}{A}} \end{aligned} \quad (7.4)$$

A Eq.(7.4) indica que, para escoamento incompressível, a variação da área e a variação da velocidade têm comportamentos opostos. Ou seja:

- Se a área aumenta, $dA > 0$ e portanto $dV < 0$
A velocidade diminui com o aumento da área
- Se a área diminui, $dA < 0$ e portanto $dV > 0$
A velocidade aumenta com a diminuição da área

Para escoamentos compressíveis, o termo $d\rho \neq 0$, o que implica que há outras maneiras de satisfazer a equação da continuidade.

Sabemos que a entalpia de estagnação é $h_0 = h + \frac{V^2}{2} = \text{constante}$. Derivando essa equação:

$$dh_0 = dh + V \cdot dV = 0 \quad (7.5)$$

Da equação de Gibbs:

$$T.ds = dh - v.dP$$

Como o escoamento é isoentrópico:

$$dh = v.dP = \frac{dP}{\rho} \quad (7.6)$$

Substituindo na Eq.(7.5):

$$dh + V.dV = 0$$

$$\boxed{\frac{dP}{\rho} + V.dV = 0} \quad (7.7)$$

A Eq.(7.7) indica que pressão e velocidade sempre têm tendências opostas.

Da definição da velocidade do som: $c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s$. Logo:

$$dP = c^2.d\rho \quad (7.8)$$

Substituindo na Eq.(7.7):

$$\begin{aligned} \frac{dP}{\rho} + V.dV &= 0 \\ \frac{c^2.d\rho}{\rho} + V.dV &= 0 \\ \frac{d\rho}{\rho} + \frac{V.dV}{c^2} &= 0 \\ \frac{d\rho}{\rho} + \frac{V.dV}{c^2} \cdot \frac{V}{V} &= 0 \\ \frac{d\rho}{\rho} + \frac{V^2.dV}{c^2.V} &= 0 \\ \frac{d\rho}{\rho} + M^2 \cdot \frac{dV}{V} &= 0 \\ \boxed{\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \cdot \frac{dV}{V}} & \quad (7.9) \end{aligned}$$

A Eq.(7.9) indica que a massa específica e a velocidade sempre mudam em direções opostas.

Substituindo a Eq.(7.9) na equação da continuidade:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} &= 0 \\ -M^2 \cdot \frac{dV}{V} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} &= 0 \\ \frac{dV}{V}(1 - M^2) &= \frac{-dA}{A} \\ \boxed{\frac{dV}{V} = -\frac{1}{1 - M^2} \frac{dA}{A}} & \quad (7.10) \end{aligned}$$

A Eq.(7.10) nos fornece a relação entre a variação da velocidade em função da variação da área para o escoamento em função do número de Mach. Substituindo na Eq.(7.7):

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{\rho} + V.dV &= 0 \\
\frac{dP}{\rho.V^2} + \frac{V.dV}{V^2} &= 0 \\
\frac{dP}{\rho.V^2} + \frac{dV}{V} &= 0 \\
\frac{dP}{\rho.V^2} - \frac{1}{1-M^2} \frac{dA}{A} &= 0 \\
\boxed{\frac{dP}{\rho.V^2} = \frac{1}{1-M^2} \frac{dA}{A}} &= 0 \quad (7.11)
\end{aligned}$$

A Eq.(7.11) nos fornece a relação entre a variação da pressão em função da variação da área para o escoamento em função do número de Mach.

Para escoamento subsônico, $M < 1$ e o termo $1 - M^2 > 0$. Dessa forma:

$$\frac{dV}{V} \propto -\frac{dA}{A} \quad (7.12)$$

e

$$\frac{dP}{\rho.V^2} \propto \frac{dA}{A} \quad (7.13)$$

Ou seja, para escoamento subsônico, área e velocidade têm direções opostas e área e pressão têm mesma direção de variação.

- Um aumento de área $dA > 0$ implica em:
diminuição da velocidade $dV < 0$
aumento da pressão $dP > 0$
- Uma diminuição da área $dA < 0$ implica em
aumento da velocidade $dV > 0$
diminuição da pressão $dP < 0$

Para escoamento supersônico, entretanto, $M > 1$ e o termo $1 - M^2 < 0$. Assim:

$$\frac{dV}{V} \propto +\frac{dA}{A} \quad (7.14)$$

e

$$\frac{dP}{\rho.V^2} \propto -\frac{dA}{A} \quad (7.15)$$

Ou seja, para escoamento supersônico, área e velocidade têm mesmo comportamento e área e pressão têm comportamentos opostos:

- Um aumento de área $dA > 0$ implica em
aumento da velocidade $dV > 0$
diminuição da pressão $dP < 0$
- Uma diminuição da área $dA < 0$ implica em
diminuição da velocidade $dV < 0$
aumento da pressão $dP > 0$

Por que ocorre a essa mudança de comportamento de subsônico para supersônico? Da Eq.(7.9):

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \cdot \frac{dV}{V}$$

$$-M^2 = \frac{\frac{d\rho}{\rho}}{\frac{dV}{V}}$$

sendo:

- $\frac{d\rho}{\rho}$: dilatação da massa específica
- $\frac{dV}{V}$: dilatação da velocidade

Quando $M < 1$,

$$\left| \frac{d\rho}{\rho} \right| < \left| \frac{dV}{V} \right| \quad (7.16)$$

, o que indica que a dilatação da velocidade é predominante (pouca variação da massa específica. Quando $M > 1$, ao contrário,

$$\left| \frac{d\rho}{\rho} \right| > \left| \frac{dV}{V} \right| \quad (7.17)$$

, o que indica que a dilatação da massa específica domina o escoamento.

7.1 O bocal de Laval

O bocal de Laval é um bocal convergente-divergente, sendo a única maneira de acelerar um escoamento subsônico para supersônico por processo permanente.

Como o escoamento sônico se comporta quando a área pode variar?

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{1-M^2} \frac{dA}{A} \quad (7.18)$$

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{dV}{V} \quad (7.19)$$

$$M = 1 \implies \frac{dA}{A} = 0 \quad (7.20)$$

A Eq.7.20 indica que o escoamento sônico só pode ocorrer onde a área não varia. Dessa forma, temos uma área mínima ou máxima.

7.1.1 Pontos sônicos possíveis

Um escoamento subsônico pode ser acelerado até Mach=1 se a área diminuir. À partir de Mach=1, para acelerar o escoamento supersônico, é necessário que a área aumente.

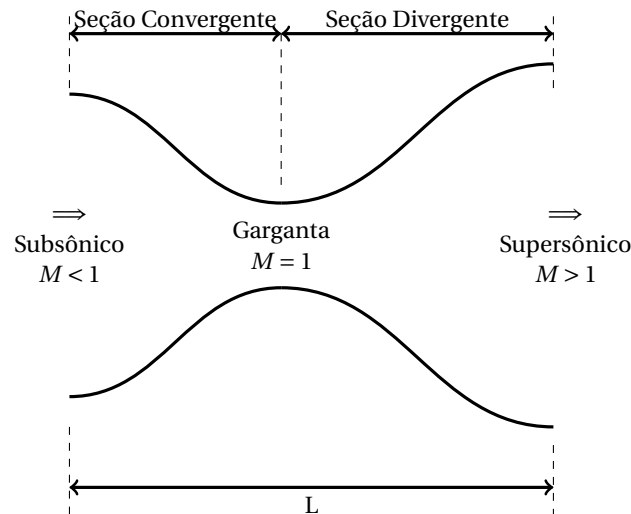
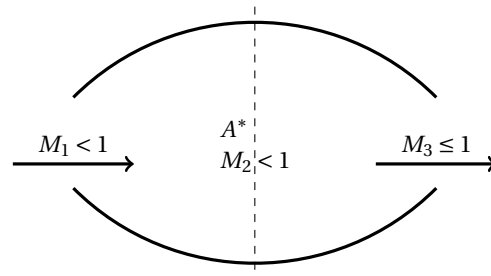


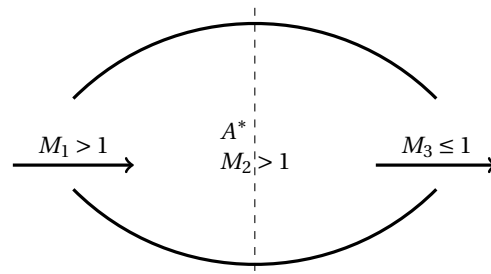
Figura 7.2 – Um bocal convergente-divergente permite acelerar um escoamento subsônico para supersônico, com Mach unitário na área mínima

Assim, é possível acelerar um escoamento subsônico para supersônico com um bocal convergente-divergente.

Por outro lado, um escoamento subsônico num difusor, em que a área aumenta, irá desacelerar. A condição em que a área é máxima será uma condição subsônica. Da mesma forma, um escoamento supersônico num bocal, em que a área aumenta, irá acelerar, e a região de área máxima também será supersônica.



- (a) Para um escoamento subsônico, se a área aumenta sua velocidade diminui, portanto ele permanece subsônico até o ponto de área máxima A^* . À partir desse ponto, uma redução da área irá acelerá-lo até o limite de Mach=1.



- (b) um escoamento supersônico com aumento de área irá acelerar, mantendo velocidade supersônica no ponto de área máxima A^* , podendo ser desacelerado com a redução da área até o limite de Mach=1

Figura 7.3 – Um bocal divergente-convergente não leva um escoamento subsônico para supersônico

Portanto, somente um bocal convergente-divergente, ou *Bocal de Laval* pode produzir Mach=1 para a condição em que a variação de área dA é nula.

7.1.2 Projeto de bocal

Estamos interessados em obter uma equação que relacione a área com a área crítica, em que Mach=1. Da equação da continuidade:

$$\dot{m} = \rho \cdot V \cdot A = \rho^* \cdot V^* \cdot A^*$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^* \cdot V^*}{\rho \cdot V} \quad (7.21)$$

Podemos relacionar as propriedades críticas e estáticas através das equações para as propriedades de estagnação. Assim:

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{\rho^*}{\rho} \cdot \frac{\rho_0}{\rho_0} = \frac{\rho^*}{\rho_0} \cdot \frac{\rho_0}{\rho}$$

Mas

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{2}{k+1}$$

e

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k+1}{2} \cdot M^2\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

Logo:

$$\boxed{\frac{\rho^*}{\rho} = \left(\frac{2}{k+1}\right) \left(1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2\right)^{\frac{1}{k-1}}} \quad (7.22)$$

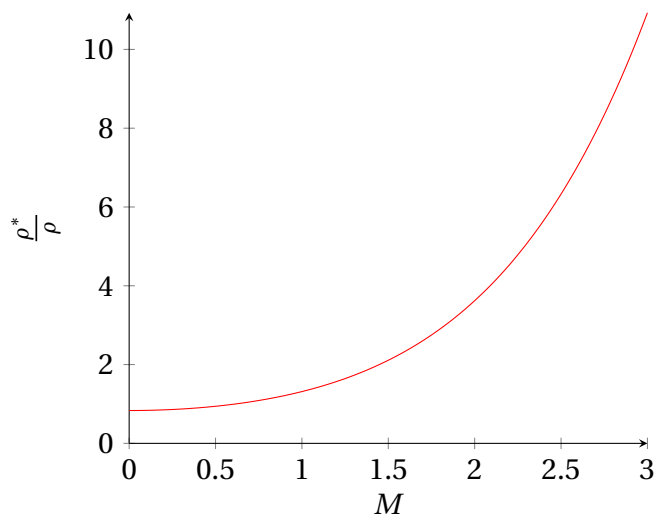


Figura 7.4 – Razão entre massa específica característica e estática em função de Mach

Para a velocidade:

$$\frac{V^*}{V} = \frac{\sqrt{k.R.T^*}}{V}$$

$$\frac{V^*}{V} = \frac{\sqrt{k.R.T} \cdot \sqrt{\frac{T^*}{T}}}{V} = \frac{c}{V} \sqrt{\frac{T^*}{T}}$$

Mas $\frac{T^*}{T} = \frac{T^*}{T_0} \cdot \frac{T_0}{T}$ e:

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1} \quad (7.23)$$

e

$$\frac{T_0}{T} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right) \quad (7.24)$$

Logo:

$$\boxed{\frac{V^*}{V} = \frac{1}{M} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (7.25)$$

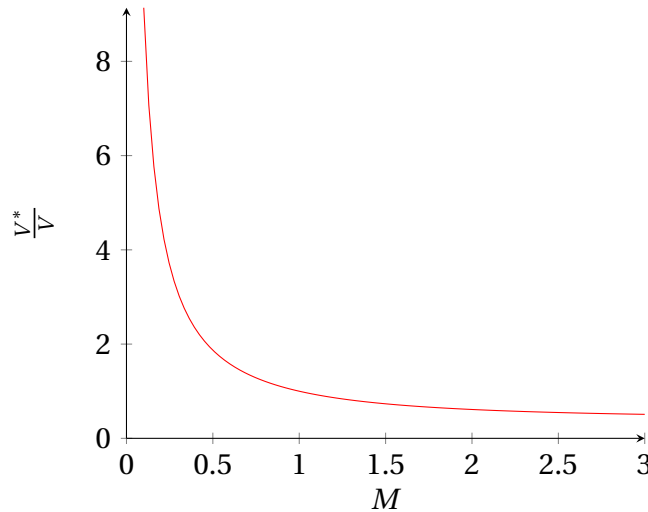


Figura 7.5 – Razão entre velocidade característica e estática em função de Mach

Substituindo na equação para a razão entre as áreas:

$$\boxed{\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{2} \cdot \frac{k+1}{k-1}} \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{2} \cdot \frac{k+1}{k-1}}} \quad (7.26)$$

A Eq.(7.26) nos fornece a razão entre a área e a área crítica em função do número de Mach. Conforme o gráfico, para cada razão de áreas existem dois números de Mach que satisfazem a equação, um subsônico e outro supersônico.

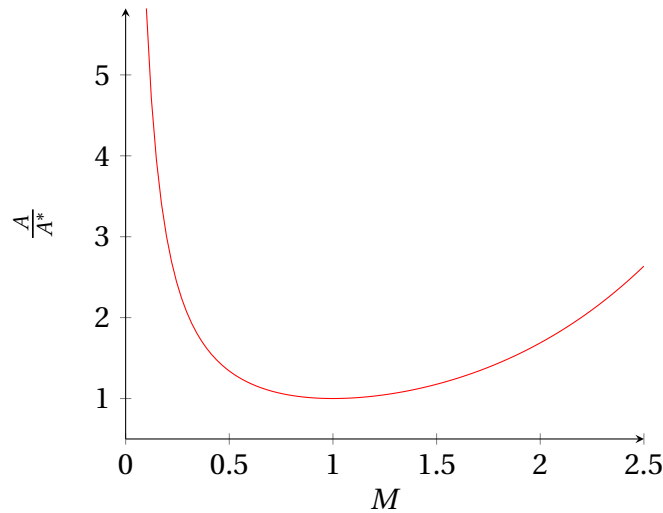


Figura 7.6 – Para dada razão entre área e área crítica, dois pontos no gráfico satisfazem a equação: um subsônico e outro supersônico.

EXEMPLO

Escoamento entra num bocal convergente-divergente com $M_1 = 0,05$. A pressão de estagnação do gás é $P_{01} = 20 \text{ MPa}$ e $T_{01} = 300 \text{ K}$, $k = 1,2$. Determine a razão entre a área e a área crítica para obter Mach=1. Se a razão entre a área de saída e a área crítica é de 30, qual o valor de Mach na saída?

■ SOLUÇÃO

Substituindo na Eq. 7.26, temos:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{0,05} \left(\frac{2}{1,2+1} \right)^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1,2+1}{1,2-1}} \left(1 + \frac{1,2-1}{2} 0,05^2 \right)^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1,2+1}{1,2-1}} = 11,85$$

Se $\frac{A}{A^*} = 30$, podemos estimar um valor de Mach e iterar até convergir. Assim:

- $M=2 \rightarrow \frac{A}{A^*} = 1,88$
- $M=4 \rightarrow \frac{A}{A^*} = 28,35$
- $M=5 \rightarrow \frac{A}{A^*} = 116$
- $M=4,5 \rightarrow \frac{A}{A^*} = 57,95$
- $M=4,1 \rightarrow \frac{A}{A^*} = 32,74$
- $M=4,05 \rightarrow \frac{A}{A^*} = 30,47$

Choque Normal

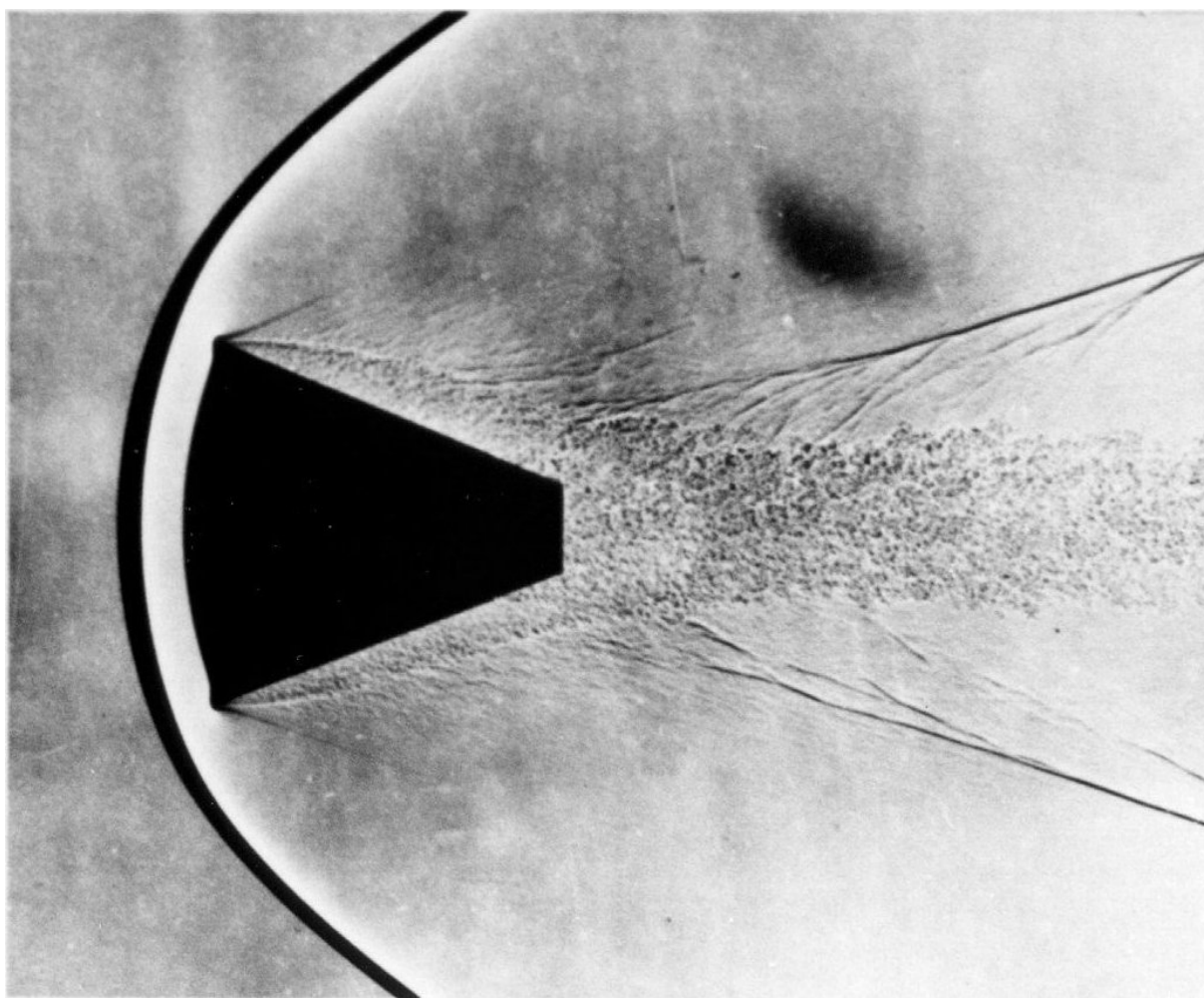


Figura 8.1 – A onda destacada no corpo rombudo alivia as altas temperatura a que aeronaves estão sujeitas na reentrada da atmosfera. Fonte: <<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Heatshield-test3.jpg>(27/04/2020)>



Figura 8.2 – Preparação no Hangar S em Cabo Canaveral, Flórida, da cápsula Wally Schirra Mercury 8, apelidada de Sigma 7 para ser acoplada ao veículo de lançamento Atlas. Imagem S62-05141, de 10/09/1962. Fonte: <https://www.flickr.com/photos/nasacommons/15865062483/> (27/04/2020)

Ondas de choque são descontinuidades no escoamento. As propriedades do fluido serão diferentes antes e depois do choque, mas não levaremos em conta como as propriedades mudam através da onda de choque. Para a conservação de massa e energia e a 2ª Lei de Newton, vamos assumir que o fluido em cada lado da onda de choque é um contínuo e as propriedades mudam instantaneamente quando passam pelo choque. Essa hipótese é uma aproximação que fornece bons resultados para diversas aplicações práticas.

O gás é considerado como uma combinação de átomos e moléculas, que consideraremos como partículas. Se a temperatura é maior do que o zero absoluto, essas partículas se movimentam à velocidade finita. A velocidade e direção de cada partícula é diferente e a velocidade média depende da temperatura. Após a colisão entre as moléculas elas trocam velocidade e direção. A distância média que uma molécula viaja antes de colidir com outra é definida como *caminho livre médio* (*mfp* do inglês *mean free path*). Se a colisão ocorre à velocidades suficientemente altas, a colisão pode gerar vibração e rotação das moléculas ou elas podem se dissociar nos seus átomos constituintes. À energias mais altas o gás pode ionizar.

Para a análise inicial, vamos ignorar os efeitos a "altas" temperaturas. Iremos modelar o gás como ideal e perfeito caloricamente. Para as partículas no gás colidindo, a espessura

da onda de choque depende da frequência das colisões, sendo tipicamente da ordem de poucos comprimentos de caminho livre molecular. No ar à pressão e temperatura ambientes o $m \approx 10^7 [m]$, portanto a onda de choque no ar terá espessura dessa ordem, e é uma boa aproximação considerá-la como uma mudança instantânea nas propriedades do gás.

Para o ar a altas altitudes, próximo da borda da atmosfera, a massa específica é muito baixa, o que resulta em um caminho livre médio molecular grande, consequentemente as ondas de choque não podem, nessas condições, serem tratadas como muito finas. Esse é um outro campo de estudo: dinâmica de gases rarefeitos. Essa situação pode ser encontrada em escoamentos hipersônicos e no instante inicial da reentrada na atmosfera de aeronaves espaciais. Conforme a altitude diminui, a massa específica aumenta e o modelo de onda de choque muito fina passa a ser válido.

8.1 Formas alternativas da equação da energia

Consideremos o escoamento entre o ponto 1 e 2 sem adição de calor ou trabalho. Do balanço de energia (1ª Lei), sabendo que para gás ideal entalpia depende da temperatura $h = c_p \cdot T$ e a velocidade do som sendo $c^2 = k \cdot R \cdot T$:

$$\begin{aligned} h_1 + \frac{V_1^2}{2} &= h_2 + \frac{V_2^2}{2} = h_o \\ c_p \cdot T_1 + \frac{V_1^2}{2} &= c_p \cdot T_2 + \frac{V_2^2}{2} \end{aligned} \quad (8.1)$$

Para gás ideal $R = c_p - c_v$, assim:

$$\begin{aligned} \frac{R}{c_p} &= \frac{c_p}{c_p} - \frac{c_v}{c_p} \\ \frac{R}{c_p} &= 1 - \frac{1}{k} \\ \frac{R}{c_p} &= \frac{k-1}{k} \\ c_p &= \frac{k \cdot R}{k-1} \end{aligned}$$

Substituindo na Eq.(8.1)

$$\begin{aligned} c_p \cdot T_1 + \frac{V_1^2}{2} &= c_p \cdot T_2 + \frac{V_2^2}{2} \\ \frac{k \cdot R}{k-1} \cdot T_1 + \frac{V_1^2}{2} &= \frac{k \cdot R}{k-1} \cdot T_2 + \frac{V_2^2}{2} \end{aligned}$$

A velocidade do som no gás é $c^2 = k \cdot R \cdot T$, logo:

$$\frac{c_1^2}{k-1} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{c_2^2}{k-1} + \frac{V_2^2}{2} \quad (8.2)$$

Consideremos as propriedades para condição característica no ponto. Sabemos que se o escoamento e levado para Mach=1 adiabaticamente $T = T^*$. Para essa condição, podemos calcular a velocidade do som característica $c^* = \sqrt{k \cdot R \cdot T^*}$. Assim:

$$\begin{aligned}
\frac{c^2}{k-1} + \frac{V^2}{2} &= \frac{(c^*)^2}{k-1} + \frac{(c^*)^2}{2} \\
&= \frac{2(c^*)^2 + (k-1)(c^*)^2}{2(k-1)} \\
&= \frac{2(c^*)^2 + k(c^*)^2 + (c^*)^2}{2(k-1)} \\
\frac{c^2}{k-1} + \frac{V^2}{2} &= \frac{(c^*)^2(k+1)}{2(k-1)} \tag{8.3}
\end{aligned}$$

Da Eq.(8.3), observamos que, conhecida a velocidade e temperatura num ponto do escoamento, podemos calcular a velocidade do som nesse ponto e também a velocidade do som característica associada a esse ponto. Dividindo a equação por V^2 :

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{c^2}{k-1}}{V^2} + \frac{V^2}{2.V^2} &= \frac{\frac{(c^*)^2(k+1)}{2(k-1)}}{V^2} \\
\frac{c^2}{V^2} \frac{1}{k-1} + \frac{1}{2} &= \frac{(C^*)^2}{V^2} \frac{k+1}{2(k-1)} \\
\frac{1}{M^2(k-1)} + \frac{1}{2} &= \frac{1}{(M^*)^2} \frac{k+1}{2(k-1)} \\
\frac{1}{M^2(k-1)} \frac{2(k-1)}{k+1} + \frac{1}{2} \frac{2(k-1)}{k+1} &= \frac{1}{(M^*)^2} \\
\frac{2}{M^2(k+1)} + \frac{k-1}{k+1} &= \frac{1}{(M^*)^2} \\
(M^*)^2 &= \frac{1}{\frac{2}{M^2(k+1)} + \frac{k-1}{k+1}} \\
\boxed{(M^*)^2 = \frac{M^2(k+1)}{2 + M^2(k-1)}} & \tag{8.4}
\end{aligned}$$

A Eq.(8.4) associa um valor de Mach característico com o valor de Mach num ponto do escoamento, e tem propriedades interessantes:

1. Para $M = 1$, $M^* = 1$
2. Para $M > 1$, $M^* > 1$
3. Para $M < 1$, $M^* < 1$
4. Para $M \rightarrow \infty$, $M^* \rightarrow \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$

O Mach característico tem o mesmo comportamento do Mach no ponto e tende a um valor finito quando Mach tende ao infinito.

8.2 A relação de Prandtl

Vamos considerar para o choque normal sem adição de calor nem trabalho as seguintes equações:

1. Continuidade: $\rho_1.V_1 = \rho_2.V_2$

2. Momento: $P_1 + \rho_1 \cdot V_1^2 = P_2 + \rho_2 \cdot V_2^2$

3. Energia: $h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2}$

4. Gás ideal: $P = \rho \cdot R \cdot T$

5. Perfeito caloricamente: $h = c_p \cdot T$

Dividindo a equação do momento pela continuidade ($\rho \cdot V$):

$$\frac{P_1}{\rho_1 \cdot V_1} + \frac{\rho_1 \cdot V_1^2}{\rho_1 \cdot V_1} = \frac{P_2}{\rho_2 \cdot V_2} + \frac{\rho_2 \cdot V_2^2}{\rho_2 \cdot V_2} \quad (8.5)$$

Mas $c^2 = k \cdot R \cdot T = k \frac{P}{\rho}$. Logo $\frac{P}{\rho} = \frac{c^2}{k}$. Assim:

$$\begin{aligned} \frac{c_1^2}{k \cdot V_1} + V_1 &= \frac{c_2^2}{k \cdot V_2} + V_2 \\ \frac{c_1^2}{k \cdot V_1} - \frac{c_2^2}{k \cdot V_2} &= V_2 - V_1 \end{aligned} \quad (8.6)$$

Da Eq.(8.3), podemos associar a velocidade e a velocidade do som no ponto com a velocidade do som característica. Substituindo:

$$\left[\frac{(k+1)(c_1^*)^2}{2 \cdot k \cdot V_1} - \frac{k-1}{2} \frac{V_1^2}{k \cdot V_1} \right] - \left[\frac{(k+1)(c_2^*)^2}{2 \cdot k \cdot V_2} - \frac{k-1}{2} \frac{V_2^2}{k \cdot V_2} \right] = V_2 - V_1 \quad (8.7)$$

Para escoamento adiabático $c_1^* = c_2^*$. Assim:

$$\begin{aligned} \frac{k+1}{2} \frac{(c^*)^2}{k \cdot V_1} - \frac{k-1}{2k} V_1 - \frac{k+1}{2} \frac{(c^*)^2}{k \cdot V_2} + \frac{k-1}{2k} V_2 &= V_2 - V_1 \\ \frac{k+1}{2} \frac{(c^*)^2}{k} \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) + \frac{k-1}{2k} (V_2 - V_1) &= V_2 - V_1 \\ \frac{k+1}{2} \frac{(c^*)^2}{k} \left(\frac{V_2 - V_1}{V_1 \cdot V_2} \right) + \frac{k-1}{2k} (V_2 - V_1) &= V_2 - V_1 \\ \frac{k+1}{2} \frac{(c^*)^2}{k} \cdot \frac{1}{V_1 \cdot V_2} + \frac{k-1}{2k} &= 1 \\ \frac{k+1}{2} \frac{(c^*)^2}{k} \cdot \frac{1}{V_1 \cdot V_2} &= 1 - \frac{k-1}{2k} \\ &= \frac{2k - k + 1}{2k} = \frac{k+1}{2k} \\ \frac{k+1}{2} \frac{(c^*)^2}{k} \cdot \frac{1}{V_1 \cdot V_2} &= \frac{k+1}{2k} \\ \boxed{(c^*)^2 = V_1 \cdot V_2} & \quad (8.8) \end{aligned}$$

A Eq.(8.8) é a Relação de Prandtl. Podemos determinar a relação entre o mach característico antes e depois do choque:

$$\begin{aligned} (c^*)^2 &= c^* \cdot c^* = V_1 \cdot V_2 \\ 1 &= \frac{V_1}{c^*} \cdot \frac{V_2}{c^*} \\ 1 &= M_1^* \cdot M_2^* \end{aligned}$$

$$M_2^* = \frac{1}{M_1^*} \quad (8.9)$$

A Eq.(8.9) nos mostra que para um Mach característico supersônico antes do choque, o mach característico deve ser subsônico após o choque. Já vimos que Mach característico supersônico resulta em Mach supersônico e Mach característico subsônico resulta em Mach subsônico. Dessa forma, para Mach supersônico antes do choque o Mach após o choque deve ser subsônico.

8.3 Propriedades após o choque em função do número de Mach

8.3.1 Número de Mach após o choque

Podemos obter o Mach após o choque em função do Mach antes do choque, sabendo que:

$$M^* = \frac{M^2(k+1)}{2 + M^2(k-1)}$$

Substituindo na Eq.(8.9)

$$\frac{M_2^2(k+1)}{2 + M_2^2(k-1)} = \frac{2 + M_1^2(k-1)}{M_1^2(k+1)}$$

$$M_2^2 = \frac{1 + [\frac{k-1}{2}]M_1^2}{k.M_1^2 - \frac{k-1}{2}} \quad (8.10)$$

O Mach antes do choque é um parâmetro importante que dita as propriedades após o choque.

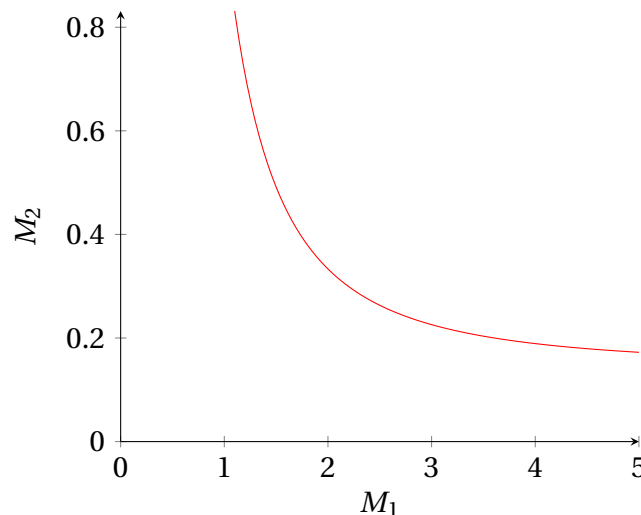


Figura 8.3 – Choque normal. Mach após o choque em função do Mach antes do choque para o ar, com $k = 1,4$

8.3.2 Razão entre massa específicas após e antes o choque normal

Outras propriedades envolvendo o número de Mach antes do choque podem ser determinadas. Da equação da continuidade e da relação de Prandtl:

$$\rho_1 \cdot V_1 = \rho_2 \cdot V_2 \rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2}$$

$$(c^*)^2 = V_1 \cdot V_2$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{\frac{(c^*)^2}{V_1}}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1^2}{(c^*)^2} = (M_1^*)^2$$

$$\boxed{\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{M_1^2(k+1)}{2 + M_1^2(k-1)}} \quad (8.11)$$

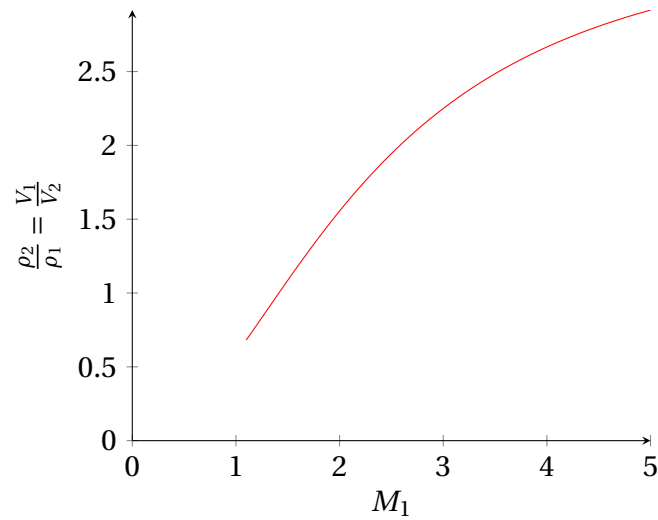


Figura 8.4 – Choque normal. Razão entre massas específicas após e antes do choque em função do número de Mach antes do choque para o ar, com $k = 1,4$

8.3.3 Razão entre as pressões após e antes do choque normal

Da equação do momento, da continuidade e Mach característico:

$$\begin{aligned}
P_1 + \rho_1 \cdot V_1^2 &= P_2 + \rho_2 \cdot V_2^2 \\
P_2 - P_1 &= \rho_1 \cdot V_1^2 - \rho_2 \cdot V_2^2 \\
P_2 - P_1 &= \rho_1 \cdot V_1 \cdot V_1 - \rho_2 \cdot V_2 \cdot V_2 \\
\rho_1 \cdot V_1 &= \rho_2 \cdot V_2 \\
P_2 - P_1 &= \rho_1 \cdot V_1 \cdot V_1 - \rho_1 \cdot V_1 \cdot V_2 \\
P_2 - P_1 &= \rho_1 \cdot V_1 (V_1 - V_2) \\
P_2 - P_1 &= \rho_1 \cdot V_1^2 \left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right) \\
\frac{P_2 - P_1}{P_1} &= \frac{\rho_1}{P_1} \cdot V_1^2 \left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right) \\
c^2 &= k \cdot \frac{P}{\rho} \\
\frac{P_2 - P_1}{P_1} &= \frac{k}{c^2} \cdot V_1^2 \left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right) \\
\frac{P_2 - P_1}{P_1} &= k \cdot M_1 \left[1 - \frac{2 + (k-1)M_1^2}{(k+1)M_1^2}\right] \\
\frac{P_2}{P_1} - \frac{P_1}{P_1} &= k \cdot M_1 \left[1 - \frac{2 + (k-1)M_1^2}{(k+1)M_1^2}\right] \\
\frac{P_2}{P_1} &= 1 + k \cdot M_1 \left[1 - \frac{2 + (k-1)M_1^2}{(k+1)M_1^2}\right] \\
\boxed{\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2k}{k+1}(M_1^2 - 1)} & \quad (8.12)
\end{aligned}$$

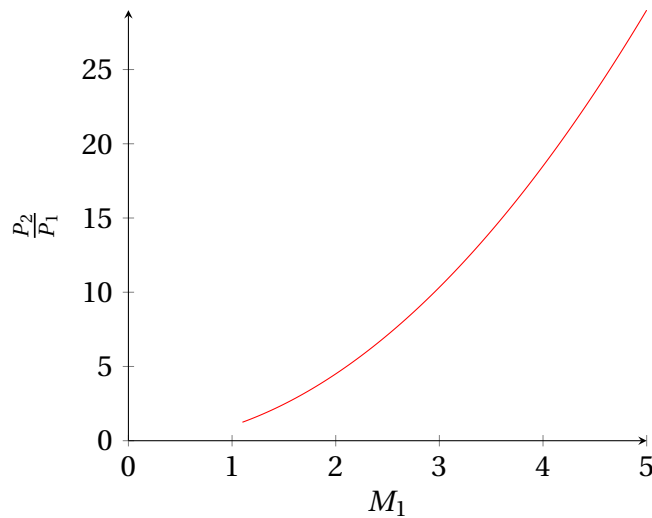


Figura 8.5 – Choque normal. Razão entre as pressões após e antes do choque em função do número de Mach antes do choque para o ar, com $k = 1,4$

8.3.4 Razão entre as temperaturas após e antes do choque normal

Da equação dos gases ideais:

$$P = \rho \cdot R \cdot T$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

$$\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \frac{h_2}{h_1} = \left[1 + \frac{2k}{k+1} (M_1^2 - 1) \right] \left[\frac{2 + (k-1)M_1^2}{(k+1)M_1^2} \right]} \quad (8.13)$$

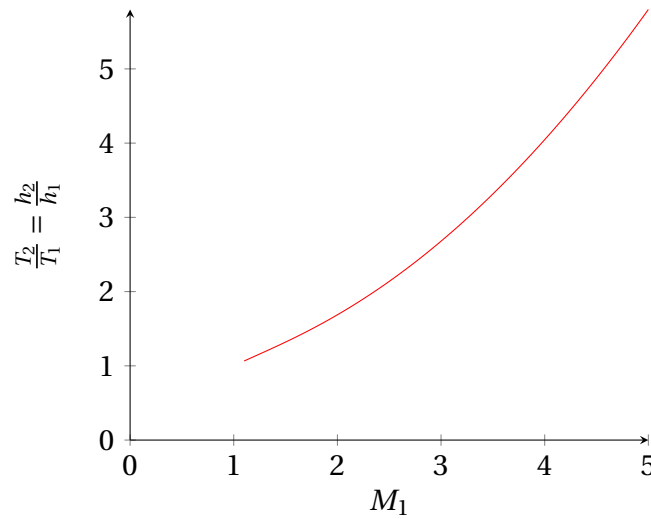


Figura 8.6 – Choque normal. Razão entre as temperaturas após e antes do choque em função do número de Mach antes do choque para o ar, com $k = 1,4$

8.3.5 Entropia

Substituindo as equações para as razões entre as temperaturas e pressões na equação da variação de entropia para gases ideais:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - R \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{h_2}{h_1} = \left[1 + \frac{2k}{k+1} (M_1^2 - 1) \right] \left[\frac{2 + (k-1)M_1^2}{(k+1)M_1^2} \right]$$

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2k}{k+1} (M_1^2 - 1)$$

Dessa forma, a variação da entropia também pode ser determinada em função de Mach antes do choque:

$$s_2 - s_1 = F(M_1) \quad (8.14)$$

Todas as equações desenvolvidas para as propriedades após o choque valem, matematicamente, para qualquer valor de Mach antes do choque, subsônico ou supersônico. Assim:

1. Se $M_1 = 1$, $s_2 - s_1 = 0$
2. Se $M_1 > 1$, $s_2 - s_1 > 0$

3. Se $M_1 < 1$, $s_2 - s_1 < 0$

Por definição, a onda de choque é uma região muito fina com altos gradientes de temperatura, pressão, massa específica e velocidade. Altos gradientes de temperatura implicam que os efeitos da transferência de calor não podem ser desprezados. Da mesma forma, altos gradientes de velocidade implicam que os efeitos da viscosidade não podem ser desprezados. Assim, a região do choque normal é uma região em que os efeitos dissipativos não podem ser desprezados e, portanto, a entropia deve aumentar através do choque. Assim $s_2 - s_1 \geq 0$, e consequentemente $M_1 \geq 1$. Dessa forma:

- $M_1 \geq 1$ e $M_2 \leq 1$
- $\frac{\rho_2}{\rho_1} \geq 1$
- $\frac{P_2}{P_1} \geq 1$
- $\frac{T_2}{T_1} \geq 1$

8.3.6 Variação das propriedades de estagnação através do choque normal

Consideremos um escoamento supersônico em 1 e subsônico em 2. Para ambos, podemos considerar a condição associada de estagnação, levando cada um dos pontos à velocidade nula isoentropicamente. Assim, $s_{o1} = s_1$ e $s_{o2} = s_2$ e, do balanço de energia:

$$c_p.T_1 + \frac{V_1^2}{2} = c_p.T_{o1} \quad (8.15)$$

e

$$c_p.T_2 + \frac{V_2^2}{2} = c_p.T_{o2} \quad (8.16)$$

Assim:

$$\begin{aligned} c_p.T_1 + \frac{V_1^2}{2} &= c_p.T_2 + \frac{V_2^2}{2} \\ c_p.T_{o1} &= c_p.T_{o2} \\ \boxed{T_{o1} = T_{o2}} \end{aligned} \quad (8.17)$$

A temperatura de estagnação não muda através do choque, assim como a entalpia de estagnação $h_{o1} = h_{o2}$. Para a entropia:

$$\begin{aligned} s_{o2} - s_{o1} &= c_p \ln \left(\frac{T_{o2}}{T_{o1}} \right) - R \ln \left(\frac{P_{o2}}{P_{o1}} \right) \\ s_2 - s_1 &= -R \ln \left(\frac{P_{o2}}{P_{o1}} \right) \\ \frac{P_{o2}}{P_{o1}} &= \exp \left[-\frac{s_2 - s_1}{R} \right] \end{aligned} \quad (8.18)$$

Já sabemos que $s_2 - s_1 \geq 0$, assim $P_{o2} \leq P_{o1}$.

EXEMPLO

Uma onda de choque normal ocorre num escoamento a Mach 3, com $T_1 = 200[K]$ e $P_1 = 100[KPa]$. Determine as propriedades após o choque

■ SOLUÇÃO

- Solução pelas fórmulas:

O Mach após o choque pode ser calculado com a Eq.(8.10):

$$M_2^2 = \frac{1 + [\frac{k-1}{2}]M_1^2}{k.M_1^2 - \frac{k-1}{2}}$$

$$M_2^2 = \frac{1 + [\frac{1,4-1}{2}]3^2}{1,4.3^2 - \frac{1,4-1}{2}}$$

$$M_2 = 0,475$$

Todas as equações para as variações de propriedades foram desenvolvidas em função do Mach antes do choque. Assim:

Da Eq.(8.13):

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[1 + \frac{2k}{k+1}(M_1^2 - 1) \right] \left[\frac{2 + (k-1)M_1^2}{(k+1)M_1^2} \right]$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[1 + \frac{2.1,4}{1,4+1}(3^2 - 1) \right] \left[\frac{2 + (1,4-1)3^2}{(1,4+1)3^2} \right]$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 2,679$$

$$T_2 = 535,8[K]$$

Da Eq.(8.12):

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2k}{k+1}(M_1^2 - 1)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2.1,4}{1,4+1}(3^2 - 1)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = 10,33$$

$$P_2 = 1033[KPa]$$

A massa específica inicial é:

$$P_1 = \rho_1 \cdot R \cdot T_1$$

$$\rho_1 = \frac{100[KPa]}{0,287[KJ/kg.K] \cdot 200[K]}$$

$$\rho_1 = 1,74216[kg/m^3]$$

Logo, da Eq.(8.11)

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1^2(k+1)}{2 + M_1^2(k-1)}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{3^2(1,4+1)}{2 + 3^2(1,4-1)}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 3,8571$$

$$\rho_2 = 6,72[kg/m^3]$$

As condições de estagnação são associadas, isoentropicamente, às propriedades no ponto do escoamento. Assim:

$$\frac{T_o}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2$$

$$\frac{P_o}{P} = \left(\frac{T_o}{T} \right)^{\frac{k-1}{k}}$$

Logo:

$$\frac{T_{o1}}{T_1} = 1 + \frac{1,4-1}{2} 3^2 = 2,8 \rightarrow T_{o1} = 560[K]$$

$$\frac{P_{o1}}{P_1} = \left(\frac{T_{o1}}{T_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{560}{200} \right)^{\frac{1,4-1}{1,4}} = 36,73 \rightarrow P_{o1} = 3673,27[KPa]$$

$$\frac{T_{o2}}{T_2} = 1 + \frac{1,4-1}{2} (0,475)^2 = 1,045125 \rightarrow T_{o2} = 560[K]$$

$$\frac{P_{o2}}{P_2} = \left(\frac{T_{o2}}{T_2} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{560}{535,8} \right)^{\frac{1,4-1}{1,4}} = 1,1673 \rightarrow P_{o2} = 1205,73[KPa]$$

A variação da entropia é:

$$ds = -R \ln \left(\frac{P_{o2}}{P_{o1}} \right) = -0,287 [KJ/kg.K] \ln \left(\frac{1205,73}{3673,27} \right) = 0,319 [KJ/kg.K]$$

ou

$$ds = c_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - R \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) = 1,004 \cdot \frac{535,8}{200} - 0,287 \frac{1033}{100} = 0,319 [KJ/kg.K]$$

- Solução pelas tabelas:

Podemos utilizar a Tab.(B.2) para obter o Mach após o choque e as razões entre as propriedades, com $M_1 = 3$. Temos:

M_1	M_2	$\frac{\rho_2}{\rho_1}$	$\frac{P_2}{P_1}$	$\frac{T_2}{T_1}$	ds	$\frac{P_{o2}}{P_{o1}}$	$\frac{P_{o2}}{P_1}$
3,00	0,475191	3,857143	10,333333	2,679012	0,319630	0,328344	12,060965

E as condições de estagnação podem ser obtidas pela Tab.(B.1), observando que, para o Mach após o choque é necessário realizar uma interpolação entre os valores de $M = 0,46$ e $M = 0,48$.

M	$\frac{T_o}{T}$	$\frac{P_o}{P}$	$\frac{\rho_o}{\rho}$
3,00	2,800000000	36,732721805	13,118829216
0,46	1,042320000	1,156122222	1,109181654
0,48	1,046080000	1,170784991	1,119211715

■ CONSIDERAÇÕES

A temperatura de estagnação é constante através do choque.

Escoamento Unidimensional com troca de Calor

Adição de calor e atrito podem gerar mudanças no escoamento unidimensional. O processo de adição de calor é encontrado em sistemas de propulsão, tais como turbojatos e ramjets, na forma da combustão da mistura ar-combustível.

Consideremos um escoamento com o ponto 1 antes da adição de calor e ponto 2 após a adição de calor. Da continuidade, quantidade de movimento e 1ª Lei da Termodinâmica:

$$\begin{aligned}\rho_1 \cdot V_1 &= \rho_2 \cdot V_2 \\ P_1 + \rho_1 \cdot V_1^2 &= P_2 + \rho_2 \cdot V_2^2 \\ Q + h_1 + \frac{V_1^2}{2} &= h_2 + \frac{V_2^2}{2} \\ \Delta h &= c_p \cdot \Delta T\end{aligned}\tag{9.1}$$

Considerando a entalpia e temperatura de estagnação, temos:

$$\begin{aligned}q &= \left(h_2 + \frac{V_2^2}{2} \right) - \left(h_1 + \frac{V_1^2}{2} \right) \\ q &= h_{02} - h_{01} \\ q &= c_p (T_{02} - T_{01})\end{aligned}\tag{9.2}$$

Com a Eq.9.2, conhecida a quantidade de calor adicionada e as propriedades iniciais, é possível determinar a temperatura de estagnação após a adição de calor. É importante observar que, ao contrário do choque normal, em que a temperatura de estagnação não muda antes e depois do choque, no caso de escoamento com adição de calor energia é adicionada ao sistema, e conseqüentemente a temperatura de estagnação resultante irá alterar.

O termo $\rho \cdot V^2$ da equação da quantidade de movimento pode ser escrito em função do número de Mach, sabendo que $V^2 = M^2 \cdot c^2$ e $c^2 = \frac{k \cdot P}{\rho}$

$$\begin{aligned}\rho \cdot V^2 &= \rho \frac{k \cdot P}{\rho} \cdot M^2 \\ \rho \cdot V^2 &= k \cdot P \cdot M^2\end{aligned}\tag{9.3}$$

Assim, da equação da quantidade de movimento:

$$\begin{aligned}P_1 + \rho_1 \cdot V_1^2 &= P_2 + \rho_2 \cdot V_2^2 \\ P_1 + k \cdot P_1 \cdot M_1^2 &= P_2 + k \cdot P_2 \cdot M_2^2 \\ P_1 (1 + k \cdot M_1^2) &= P_2 (1 + k \cdot M_2^2)\end{aligned}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + k.M_1^2}{1 + k.M_2^2} \quad (9.4)$$

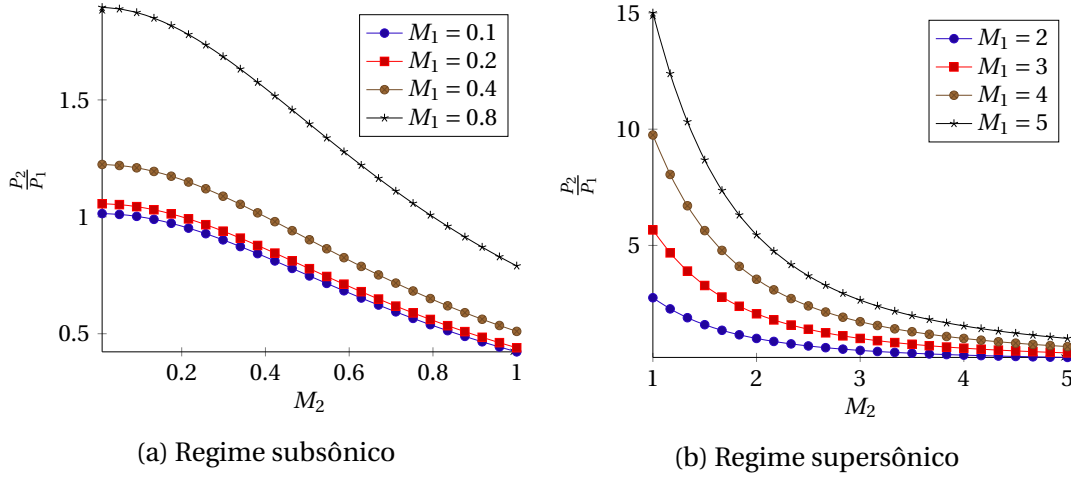


Figura 9.1 – Razão entre as pressões em escoamento de Rayleigh

Da equação dos gases ideais $R.T = \frac{P}{\rho}$, logo:

$$\frac{R.T_2}{R.T_1} = \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

Da continuidade $\rho_1.V_1 = \rho_2.V_2$, assim $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{V_2}{V_1}$, logo:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} \frac{V_2}{V_1} \quad (9.5)$$

A razão entre as velocidades pode ser escrita em função de Mach e a temperatura, pois $V = M.c = M.(k.R.T)^{1/2}$:

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{V_1} &= \frac{M_2.(k.R.T_2)^{1/2}}{M_1.(k.R.T_1)^{1/2}} \\ \frac{V_2}{V_1} &= \frac{M_2}{M_1} \cdot \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (9.6)$$

Assim, substituindo na Eq.(9.5):

$$\begin{aligned} \frac{T_2}{T_1} &= \frac{P_2}{P_1} \frac{V_2}{V_1} \\ \frac{T_2}{T_1} &= \left[\frac{1 + k.M_1^2}{1 + k.M_2^2} \right] \cdot \left[\frac{M_2}{M_1} \cdot \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{1/2} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{1 + k.M_1^2}{1 + k.M_2^2} \right)^2 \cdot \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2 \quad (9.7)$$

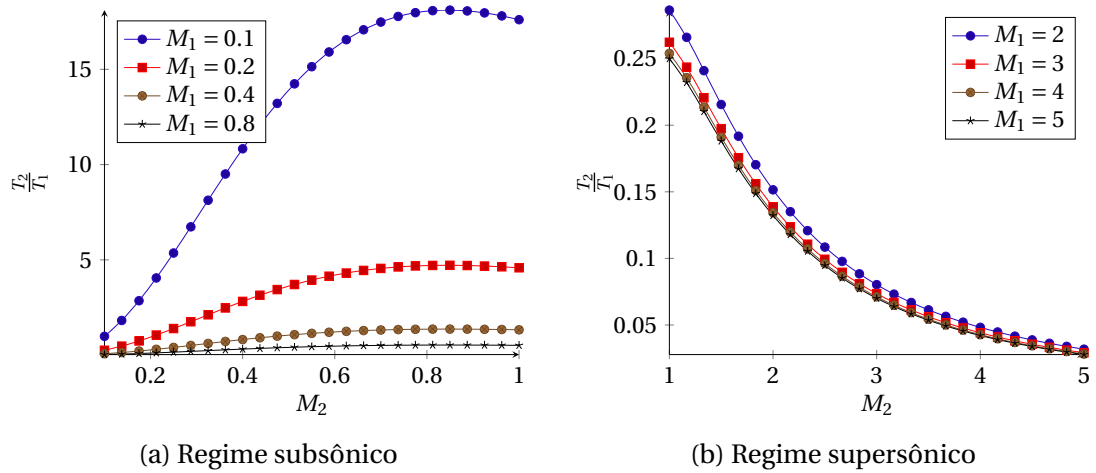


Figura 9.2 – Razão entre temperaturas para escoamento de Rayleigh

Também da equação dos gases ideais, podemos escrever a razão entre as massas específicas:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{P_2}{P_1} \frac{T_1}{T_2} \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \left[\frac{1 + k.M_1^2}{1 + k.M_2^2} \right] \cdot \left[\left(\frac{1 + k.M_2^2}{1 + k.M_1^2} \right)^2 \cdot \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^2 \right] \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \left(\frac{1 + k.M_2^2}{1 + k.M_1^2} \right) \cdot \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^2 \end{aligned} \quad (9.8)$$

Sabemos das equações isoentrópicas que a pressão e temperatura de estagnação podem ser relacionadas com as pressões e temperaturas estáticas:

$$\begin{aligned} \frac{T_o}{T} &= 1 + \frac{k-1}{2} . M^2 \\ T_o &= \left[1 + \frac{k-1}{2} . M^2 \right] . T \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{P_o}{P} &= \left(1 + \frac{k-1}{2} . M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \\ P_o &= \left[\left(1 + \frac{k-1}{2} . M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \right] . P \end{aligned}$$

Assim, podemos associar os pontos 1 e 2 com suas respectivas propriedades de estagnação. A razão entre as temperaturas de estagnação é:

$$\begin{aligned} \frac{T_{o2}}{T_{o1}} &= \frac{1 + \frac{k-1}{2} . M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} . M_1^2} \cdot \frac{T_2}{T_1} \\ \frac{T_{o2}}{T_{o1}} &= \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} . M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} . M_1^2} \right) \cdot \left(\frac{1 + k.M_1^2}{1 + k.M_2^2} \right)^2 \cdot \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2 \end{aligned} \quad (9.9)$$

E a razão entre as pressões de estagnação:

$$\frac{P_{o2}}{P_{o1}} = \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2} \cdot M_2^2\right)^{\frac{k}{k-1}}}{\left(1 + \frac{k-1}{2} \cdot M_1^2\right)^{\frac{k}{k-1}}} \cdot \frac{P_2}{P_1}$$

$$\boxed{\frac{P_{o2}}{P_{o1}} = \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} \cdot M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} \cdot M_1^2}\right)^{\frac{k}{k-1}} \cdot \left(\frac{1 + k \cdot M_1^2}{1 + k \cdot M_2^2}\right)} \quad (9.10)$$

Conhecidas as razões entre as temperaturas e pressões, obtém-se diretamente a variação de entropia no processo:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - R \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \quad (9.11)$$

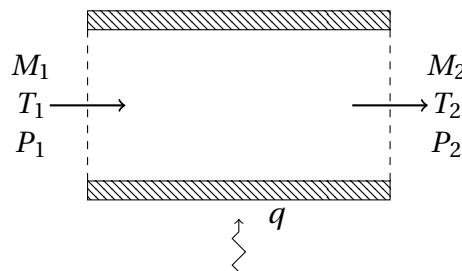
O procedimento de solução para escoamentos unidimensionais com adição de calor, conhecidas todas as propriedades iniciais e a quantidade de calor fornecida, é:

1. Para uma dada quantidade de calor conhecida, obter T_{o2}
2. Com T_{o2} , obter M_2
3. Com M_2 , obter $\frac{T_2}{T_1}$, $\frac{P_2}{P_1}$ e $\frac{\rho_2}{\rho_1}$

EXEMPLO

Ar entra num duto de área de seção constante com $M_1 = 0,3$, $P_1 = 1[atm]$ e $T_1 = 300[K]$. É adicionado na seção $100[KJ/kg]$ de calor. Calcule as propriedades na saída da seção de aquecimento

■ SOLUÇÃO



Vamos considerar as seguintes hipóteses:

- Regime permanente
- Escoamento unidimensional
- Desprezando efeitos viscosos
- Desprezando forças de corpo
- Considerando como força de superfície apenas os efeitos da pressão

Podemos utilizar as equações governantes, continuidade, momento e energia, para modelar o exercício proposto. O primeiro passo é obter as temperaturas de estagnação. Assim:

$$\begin{aligned}\frac{T_{o1}}{T_1} &= 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \\ \frac{T_{o1}}{T_1} &= 1 + \frac{1,4-1}{1,4} \cdot 0,3^2 \\ \frac{T_{o1}}{T_1} &= 1,018\end{aligned}$$

Esse valor também poderia ser obtido pelo uso da Tab(B.1) para escoamento isoentrópico.

Assim $T_{o1} = 305,4[K]$. Podemos agora utilizar a Eq.(9.2) para obter a temperatura de estagnação na saída:

$$\begin{aligned}q &= c_p(T_{o2} - T_{o1}) \\ 100[KJ/kg] &= 1,004[KJ/kg.K](T_{o2} - 305,4) \\ T_{o2} &= 405[K]\end{aligned}$$

O Mach na saída pode ser determinado pela Eq.(9.9):

$$\begin{aligned}\frac{T_{o2}}{T_{o1}} &= \left(\frac{1 + k.M_1^2}{1 + k.M_2^2} \right)^2 \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2 \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \right) \\ \frac{405}{305,4} &= \left(\frac{1 + 1,4 \cdot 0,3^2}{1 + 1,4.M_2^2} \right)^2 \left(\frac{M_2}{0,3} \right)^2 \left(\frac{1 + \frac{1,4-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{1,4-1}{2} 0,3^2} \right)\end{aligned}$$

A equação apresenta como incógnita apenas o M_2 . Por um processo de iteração, obtemos o valor de $M_2 = 0,36$. Agora podemos fazer uso das demais equações, que dependem de M_1 e M_2 :

$$\begin{aligned}\frac{T_2}{T_1} &= \left(\frac{1 + k.M_1^2}{1 + k.M_2^2} \right)^2 \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2 = \left(\frac{1 + 1,4 \cdot 0,3^2}{1 + 1,4 \cdot 0,36^2} \right)^2 \left(\frac{0,36}{0,3} \right)^2 = 1,308 \\ T_2 &= 392,4[K]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{P_2}{P_1} &= \frac{1 + k.M_1^2}{1 + k.M_2^2} = \frac{1 + 1,4 \cdot 0,3^2}{1 + 1,4 \cdot 0,36^2} = 0,95 \\ P_2 &= 0,95[atm]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\rho_2}{\rho_1} &= \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^2 \left(\frac{1 + k.M_2^2}{1 + k.M_1^2} \right) = \left(\frac{0,3}{0,36} \right)^2 \frac{1 + 1,4 \cdot 0,36^2}{1 + 1,4 \cdot 0,3^2} = 0,7286 \\ \rho_2 &= 0,84[kg/m^3]\end{aligned}$$

■ CONSIDERAÇÕES

A obtenção do número de Mach pela Eq.(9.9) exige um processo iterativo. A condição sônica, apresentada na Seção (9.1) pode ser utilizada como referência para um procedimento de solução mais simples, além de possibilitar o uso de tabelas para escoamento de Rayleigh.

O escoamento subsônico aquecido é acelerado, enquanto o escoamento supersônico aquecido é desacelerado.

9.1 Equações em função da condição sônica

Para qualquer ponto do escoamento podemos associá-lo à condição sônica, que é a condição em que Mach é unitário.

Em escoamentos isoentrópico e com choque normal essa condição é chamada de condição característica, sendo diferente de um ponto ao outro do escoamento, pois está associada ao ponto em análise em si.

Em escoamento com troca de calor a condição sônica é a condição que existirá se calor for adicionado ou removido em quantidade suficiente para acelerar ou desacelerar o escoamento à Mach unitário. O escoamento subsônico aquecido pode ser acelerado à condição sônica e um escoamento supersônico aquecido pode ser desacelerado para Mach unitário. Assim, a condição sônica é uma condição de referência constante no escoamento com adição de calor.

As propriedades na condição sônica serão representadas por $*$, mas é importante não confundir com as propriedades características de escoamentos isoentrópicos e com choque, cujas propriedades também são representadas por $*$. Embora ambas estejam relacionadas à Mach=1, elas são fundamentalmente diferentes: a propriedade característica é obtida isoentrópicamente, enquanto a propriedade sônica não.

Os cálculos ficam mais convenientes, pois pode-se obter equações para a condição sônica em função do número de Mach local.

Assim, seja $M_1 = 1$, $P_1 = P^*$, $T_1 = T^*$, $\rho_1 = \rho^*$, $P_o^1 = P_o^*$, $T_o^1 = T_o^*$ e $M_2 = M$, todas as razões entre as propriedades características e as propriedades estáticas podem ser obtidas:

- Para a temperatura:

$$\begin{aligned} \frac{T_2}{T_1} &= \left(\frac{1 + k.M_1^2}{1 + k.M_2^2} \right)^2 \cdot \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2 \\ \frac{T}{T^*} &= \left(\frac{1 + k.1^2}{1 + k.M^2} \right)^2 \cdot \left(\frac{M}{1} \right)^2 \\ \boxed{\frac{T}{T^*} = M^2 \left(\frac{1 + k}{1 + k.M^2} \right)^2} \end{aligned} \quad (9.12) \quad \Leftarrow \xi^*$$

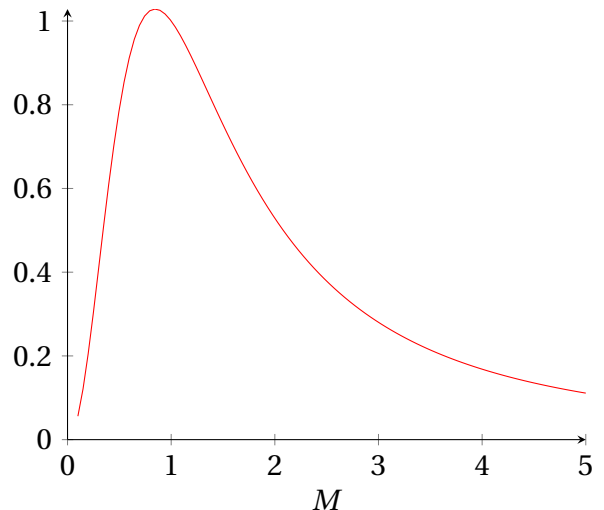


Figura 9.3 – Escoamento unidimensional com troca de calor. Razão entre a temperatura estática e sônica para o ar, com $k = 1,4$

- Para a pressão:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + k.M_1^2}{1 + k.M_2^2}$$

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1 + k.1^2}{1 + k.M^2}$$

$$\boxed{\frac{P}{P^*} = \frac{1 + k}{1 + k.M^2}}$$

(9.13)

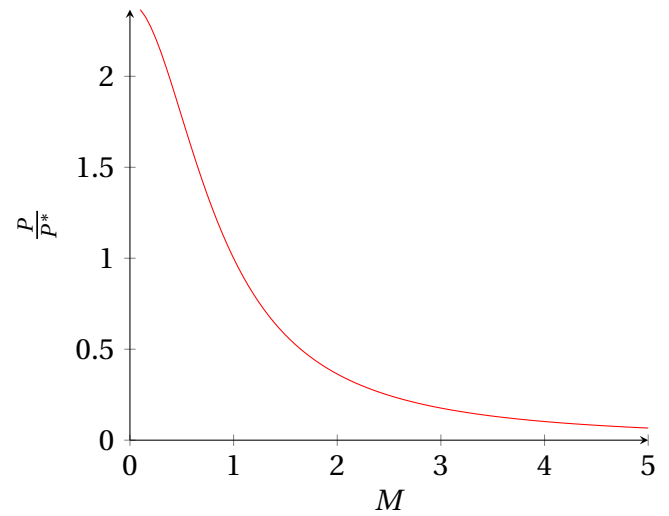


Figura 9.4 – Escoamento unidimensional com troca de calor. Razão entre a Pressão estática e sônica para o ar, com $k = 1,4$

- Para a massa específica

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{1 + k.M_2^2}{1 + k.M_1^2} \right) \cdot \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^2$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \left(\frac{1 + k.M^2}{1 + k.1^2} \right) \cdot \left(\frac{1}{M} \right)^2$$

$$\boxed{\frac{\rho}{\rho^*} = \left(\frac{1 + k.M^2}{1 + k} \right) \cdot \left(\frac{1}{M} \right)^2}$$

(9.14)

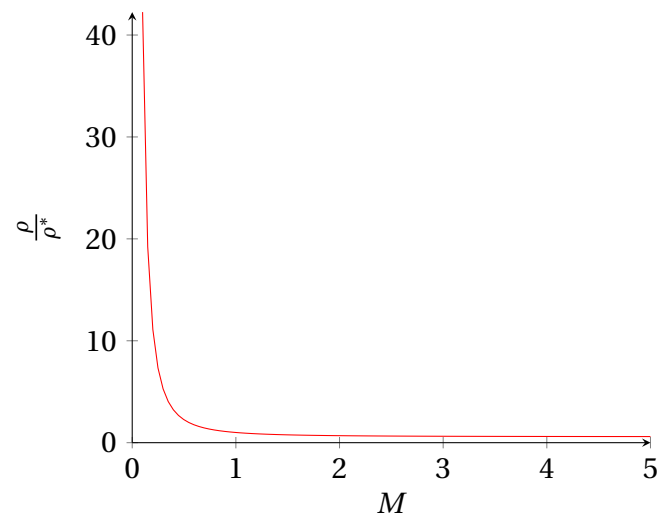


Figura 9.5 – Escoamento unidimensional com troca de calor. Razão entre a massa específica estática e sônica para o ar, com $k = 1,4$

- Para a pressão de estagnação:

$$\frac{P_{o2}}{P_{o1}} = \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} \cdot M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} \cdot M_1^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \cdot \left(\frac{1 + k \cdot M_1^2}{1 + k \cdot M_2^2} \right)$$

$$\frac{P_o}{P_o^*} = \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2}{1 + \frac{k-1}{2} \cdot 1^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \cdot \left(\frac{1 + k \cdot 1^2}{1 + k \cdot M^2} \right)$$

$$\boxed{\frac{P_o}{P_o^*} = \left(\frac{2 + (k-1) \cdot M^2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \cdot \left(\frac{1+k}{1+k \cdot M^2} \right)} \quad (9.15)$$

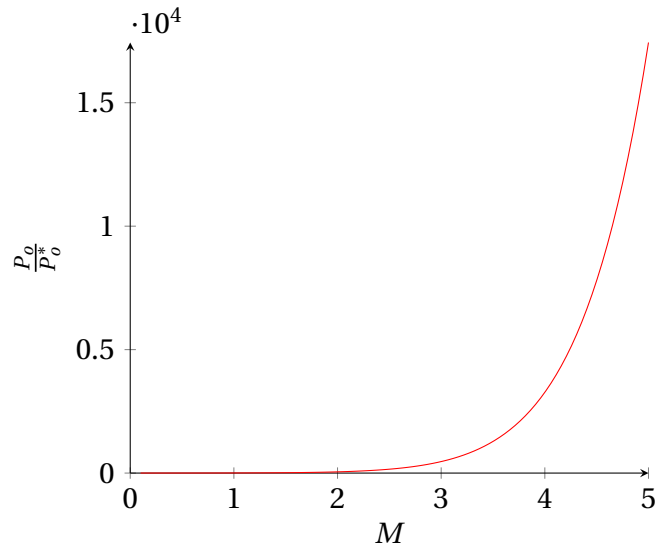


Figura 9.6 – Escoamento unidimensional com troca de calor. Razão entre a pressão de estagnação estática e sônica para o ar, com $k = 1,4$

- Para a temperatura de estagnação:

$$\frac{T_{o2}}{T_{o1}} = \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} \cdot M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} \cdot M_1^2} \right) \cdot \left(\frac{1 + k \cdot M_1^2}{1 + k \cdot M_2^2} \right)^2 \cdot \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2$$

$$\frac{T_o}{T_o^*} = \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2}{1 + \frac{k-1}{2} \cdot 1^2} \right) \cdot \left(\frac{1 + k \cdot 1^2}{1 + k \cdot M^2} \right)^2 \cdot \left(\frac{M}{1} \right)^2$$

$$\boxed{\frac{T_o}{T_o^*} = \frac{(k+1)M^2}{(1+k \cdot M^2)^2} \cdot [2 + (k-1)M^2]} \quad (9.16)$$

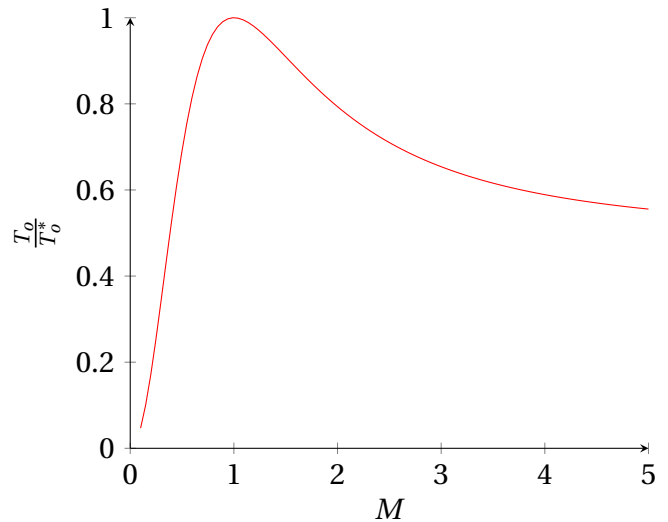
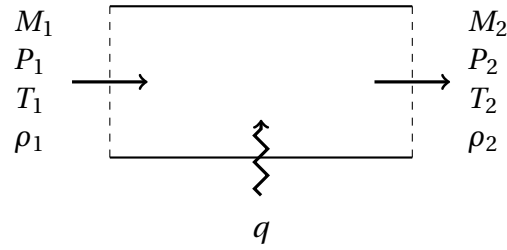
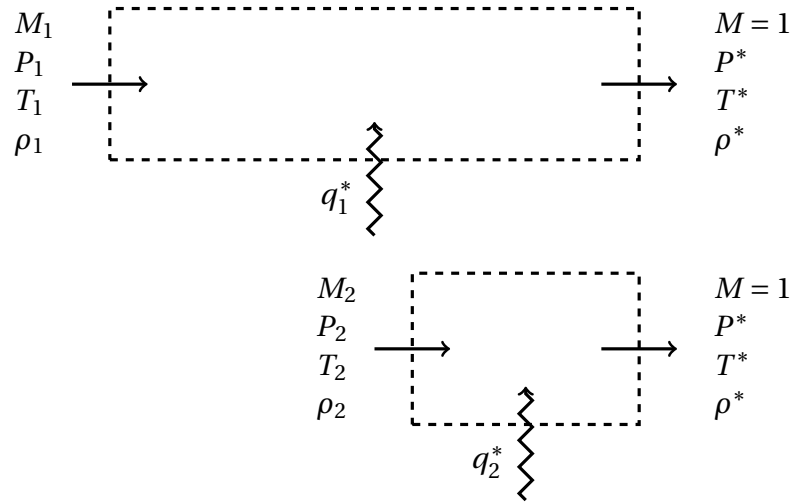


Figura 9.7 – Escoamento unidimensional com troca de calor. Razão entre a temperatura de estagnação estática e sônica para o ar, com $k = 1,4$

Utilizando a condição sônica como referência, é possível determinar quanto de calor é necessário para levar a saída para $M = 1$ sabendo quanto de calor é necessário para levar a entrada para $M = 1$ e quanto de calor efetivamente é trocado.



(a) Volume de controle com adição de calor



(b) As propriedades na saída 2 no sistema original podem ser determinadas calculando-se as propriedades sônicas à partir de 1.

Figura 9.8 – Quantidades de calor para levar a entrada e a saída para a condição sônica

A razão entre as propriedades do escoamento em função da condição sônica em função do número de Mach para o ar ($k = 1,4$) é apresentada na Tabela (B.3).

EXEMPLO

Ar entra num duto de área de seção constante com $M_1 = 0,3$, $P_1 = 1[atm]$ e $T_1 = 300[K]$. É adicionado na seção $100[KJ/kg]$ de calor. Calcule as propriedades na saída da seção de aquecimento

■ SOLUÇÃO

Para resolver utilizando a condição sônica como referência, precisamos, primeiro, determinar as propriedades sônicas do escoamento. Das Eqs.(9.12), (9.13) e (9.14):

- Temperatura

$$\frac{T_1}{T^*} = M^2 \left(\frac{1+k}{1+k.M^2} \right)^2 = 0,3^2 \left(\frac{1+1,4}{1+1,4.0,3^2} \right)^2 = 0,4089$$

$$T^* = 733,72[K]$$

- Pressão

$$\frac{P_1}{P^*} = \frac{1+k}{1+k.M_1^2} = \frac{1+1,4}{1+1,4.0,3^2} = 2,13$$

$$P^* = 0,469[atm]$$

- Massa específica

$$\frac{\rho_1}{\rho^*} = \left(\frac{1 + k.M_1^2}{1 + k} \right) \cdot \left(\frac{1}{M} \right)^2 = \left(\frac{1 + 1,4 \cdot 0,3^2}{1 + 1,4} \right) \cdot \left(\frac{1}{0,3} \right)^2 = 5,21$$

$$\rho^* = 0,22[kg/m^3]$$

Utilizamos a temperatura sônica para determinar a quantidade de calor q^* necessária para levar o escoamento para $M = 1$. Assim:

$$q^* = c_p(T^* - T_1)$$

$$q^* = 1,004[KJ/kg.k](733,72 - 300)[K]$$

$$q^* = 435,46[KJ/kg]$$

Da Fig.(9.8b), observamos que podemos determinar qual a quantidade de calor necessária para levar a condição de saída (2) para Mach=1:

$$q_2^* = q_1^* - q$$

$$q_2^* = 435,46[KJ/kg] - 100[KJ/kg]$$

$$q_2^* = 335,46[KJ/kg]$$

Com o calor necessário para levar a saída para Mach=1 e a temperatura sônica, obtemos a temperatura T_2 :

$$q_2^* = c_p(T^* - T_2)$$

$$335,46[KJ/kg] = 1,004[KJ/kg.K](733,72[K] - T_2)$$

$$T_2 = 399,597[K]$$

Fazemos uso novamente da Eq.(9.12) para determinar M_2 :

$$\frac{T_2}{T^*} = M_2^2 \left(\frac{1 + k}{1 + k.M_2^2} \right)^2$$

$$\frac{399,597}{733,72} = M_2^2 \left(\frac{1 + 1,4}{1 + 1,4.M_2^2} \right)^2$$

$$M_2 \approx 0,36$$

Agora podemos utilizar as Eqs.(9.12), (9.13) e (9.14) para determinar as propriedades na saída:

$$\frac{T_2}{T^*} = 0,36^2 \left(\frac{1 + 1,4}{1 + 1,4 \cdot 0,36^2} \right)^2 = 0,5348$$

$$T_2 = 392,4[K]$$

$$\frac{P_2}{P^*} = \frac{1 + 1,4}{1 + 1,4 \cdot 0,36^2} = 2,031$$

$$P_2 = 0,95[atm]$$

$$\frac{\rho_2}{\rho^*} = \left(\frac{1 + 1,4 \cdot 0,36^2}{1 + 1,4} \right) \cdot \left(\frac{1}{0,36} \right)^2 = 3,8$$

$$\rho_2 = 0,84[kg/m^3]$$

Resolvendo utilizando a tabela

■ SOLUÇÃO

A possibilidade do uso de valores tabelados é uma das principais vantagens da condição sônica. Da Tab.(B.3):

M	$\frac{T}{T^*}$	$\frac{P}{P^*}$	$\frac{\rho}{\rho^*}$	$\frac{P_o}{P_o^*}$	$\frac{T_o}{T_o^*}$
0,3	0,40887279	2,13143872	5,21296296	1,19854878	0,34686042

Com Mach inicial, obtemos as propriedades sônicas do escoamento:

$$\begin{aligned}\frac{T_1}{T^*} &= 0,40887279 \rightarrow T^* = 733,72[K] \\ \frac{P_1}{P^*} &= 2,13143872 \rightarrow P^* = 0,469[atm] \\ \frac{\rho_1}{\rho^*} &= 5,21296296 \rightarrow \rho^* = 0,22[kg/m^3]\end{aligned}$$

Calculamos, agora, a quantidade de calor (q^*) necessária para levar o escoamento na entrada para a condição sônica:

$$q^* = c_P(T^* - T_1) = 1,004[KJ/kg.K](733,72 - 300)[K] = 435,46[KJ/kg]$$

E a quantidade de calor necessária para levar a saída à condição sônica:

$$q = q^* - q_2^* \rightarrow q_2^* = 335,46[KJ/kg]$$

Agora calculamos a temperatura T_2 :

$$q_2^* = c_P(T^* - T_2) \rightarrow T_2 = 399,6[K]$$

Para utilizar novamente a tabela, calculamos a razão entre a temperatura e a temperatura sônica:

$$\frac{T_2}{T^*} = \frac{399,6}{733,72} = 0,5446240986$$

Vamos buscar esse valor na coluna apropriada da tabela:

M	$\frac{T}{T^*}$	$\frac{P}{P^*}$	$\frac{\rho}{\rho^*}$	$\frac{P_o}{P_o^*}$	$\frac{T_o}{T_o^*}$
0,36	0,53481569	2,03141928	3,79835391	1,17371444	0,45723176
0,38	0,57552624	1,99640647	3,46883657	1,16517497	0,49345620

Observamos que o valor está entre as linhas para $M = 0,36$ e $M = 0,38$. Podemos fazer uma interpolação linear para aproximar os valores, obtendo um valor de $M = 0,3648$. Nos cálculos anteriores nós aproximamos para o valor de $M \approx 0,36$. Todas as propriedades na saída podem agora ser determinadas pela interpolação na tabela. Deixamos a cargo do leitor a realização dos cálculos.

■ CONSIDERAÇÕES

Na apresentação dos resultados utilizamos duas casas decimais. Nas contas intermediárias, é recomendado utilizar todas as casas decimais para evitar a propagação do erro de arredondamento. No final apresenta-se os valores com a quantidade de algarismos significativos apropriados.

9.2 O diagrama entalpia-entropia

A adição de calor aumenta a entropia. No regime subsônico essa adição acelera o escoamento, podendo levá-lo para a condição sônica se $q = q^*$. No regime supersônico a adição de calor desacelera o escoamento, também podendo-se atingir a condição sônica se $q = q^*$. Em $M = 1$ o escoamento está estrangulado, pois um aquecimento adicional não leva o escoamento subsônico para o regime supersônico e vice-versa.

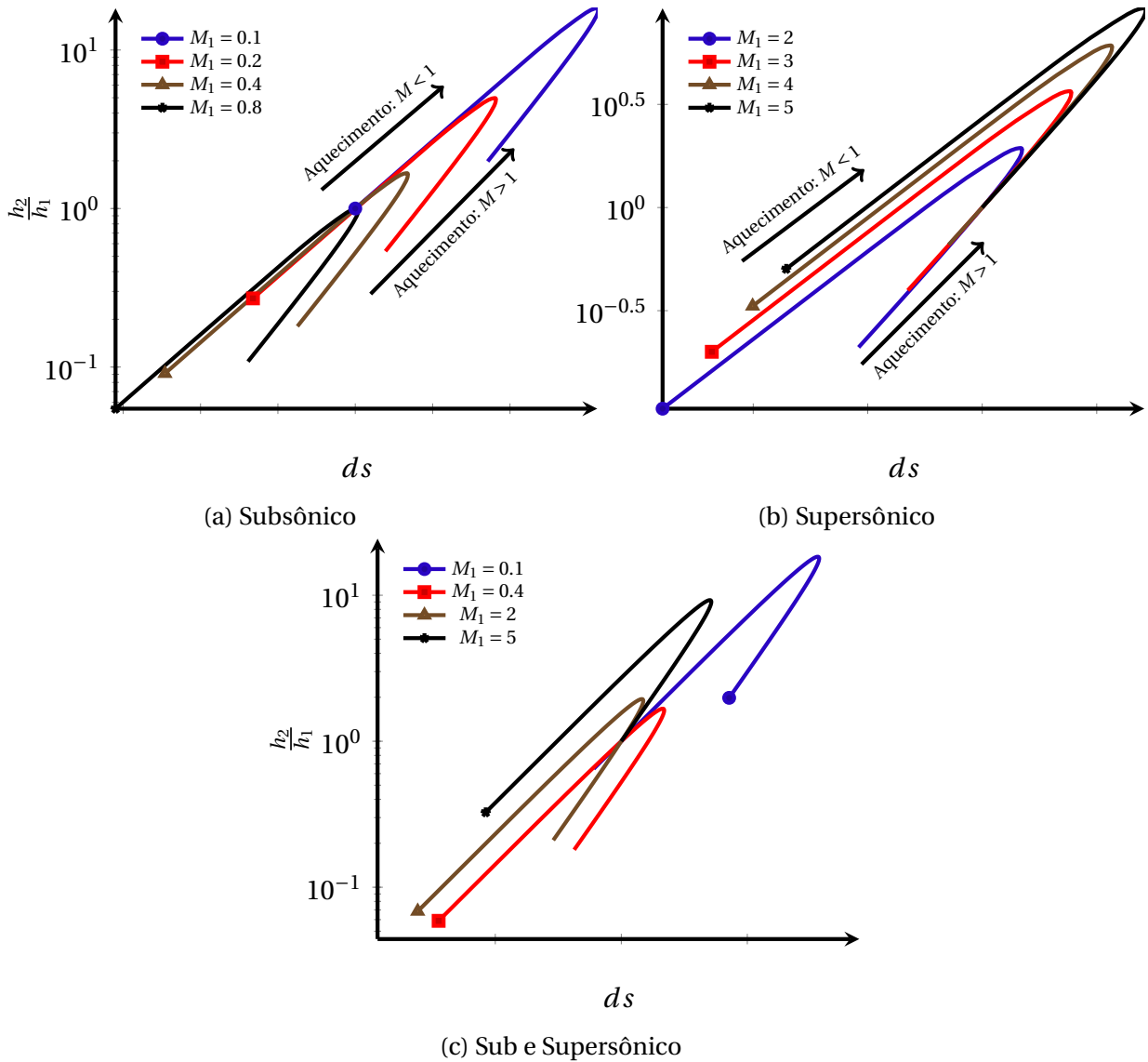


Figura 9.9 – Diagrama de Rayleigh (ds vs h) para diferentes valores de Mach inicial. O valor da variação da entropia é calculado por $ds = c_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - R \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right)$ e no eixo y o valor logarítmico da razão de entalpia ou temperatura $\frac{h_2}{h_1} = \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{1+k.M_1^2}{1+k.M_2^2} \right)^2 \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2$.

9.3 Escoamento estrangulado

Dada uma condição inicial, existe uma quantidade máxima de calor q^* que pode ser adicionada e leva o escoamento para a condição sônica. Para essa condição inicial existe uma relação máxima para $\frac{T_0}{T_o}$, que pode ser observada na Fig.(9.10).

Se mais calor for adicionado, ocorrerá um reajuste transiente nas condições do escoamento, através de propagação de ondas de pressão no duto, até que o escoamento atinja uma nova condição permanente, com Mach unitário na saída, quando se diz que o escoamento está estrangulado.

Se o escoamento é subsônico, o Mach na entrada e a taxa mássica são reduzidos para permitir essa maior razão $\frac{T_o}{T_o^*}$.

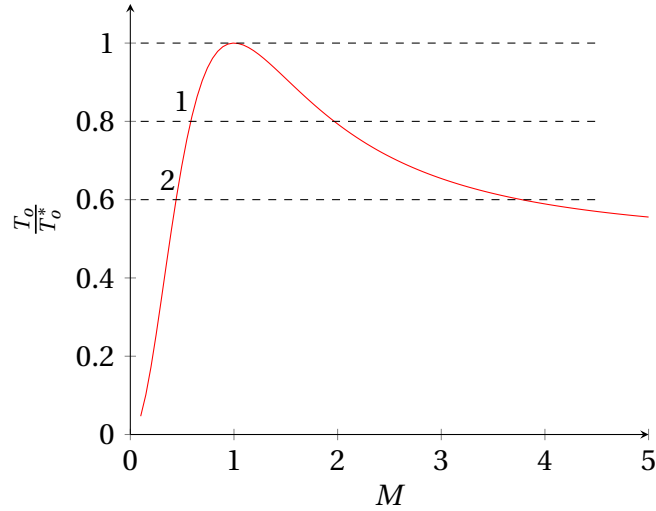


Figura 9.10 – Para escoamento subsônico estrangulado, o aumento da razão T_o^*/T_o implica em uma redução do Mach na entrada.

EXEMPLO

Condidere o escoamento de ar com $M_1 = 0,3$, $T_{o1} = 300[K]$. Qual a quantidade de calor necessária para levar o escoamento para $M = 1$? Se for adicionado 20% a mais de calor, qual será o efeito no escoamento?

■ SOLUÇÃO

Para a condição inicial, a máxima relação $\frac{T_o}{T_o^*}$ pode ser determinada pela Eq.(9.16) ou pela Tab.(B.3):

$$\frac{T_o}{T_o^*} = \frac{(k+1)M^2}{(1+k.M^2)^2} \cdot [2 + (k-1)M^2] = \frac{(1,4+1)0,3^2}{(1+1,4.0,3^2)^2} \cdot [2 + (1,4-1)0,3^2] = 0,346886042 \rightarrow T_o^* = 864,90[K]$$

O que resulta numa quantidade de calor máxima de:

$$q^* = c_p(T_o^* - T_o) = 1,004[KJ/kg.K](864,9 - 300)[K] = 567,16[KJ/kg]$$

Se a quantidade de calor é 20% maior, temos $q = 680,59[KJ/kg]$. Assim a temperatura de estagnação na saída será de:

$$T_o^* = T_o + \frac{q}{c_p} = 977,88[K]$$

A nova razão entre as temperaturas de estagnação será de:

$$\frac{T_o}{T_o^*} = \frac{300}{977,77} = 0,306785$$

Da Tab(B.3), fazendo uma aproximação por interpolação linear, obtém-se o valor de $M_1 = 0,278$.

Se o escoamento for supersônico e for adicionado uma quantidade de calor maior do que o necessário para levar a saída para a condição sônica, as ondas de pressão no duto levarão a um choque, alterando o escoamento na entrada (1) para o regime subsônico (2). Como a temperatura de estagnação não altera através do choque, a razão máxima $\frac{T_{o1}}{T_o^*} = \frac{T_{o2}}{T_o^*}$ não será alterada. Observamos na Fig.(9.11) que essa razão implica em um Mach subsônico e outro supersônico. Assim, para permitir que a quantidade de calor especificada seja adicionada, a nova razão entre as temperaturas de estagnação implicará em um novo Mach na entrada (3) menor do que o valor em 2.

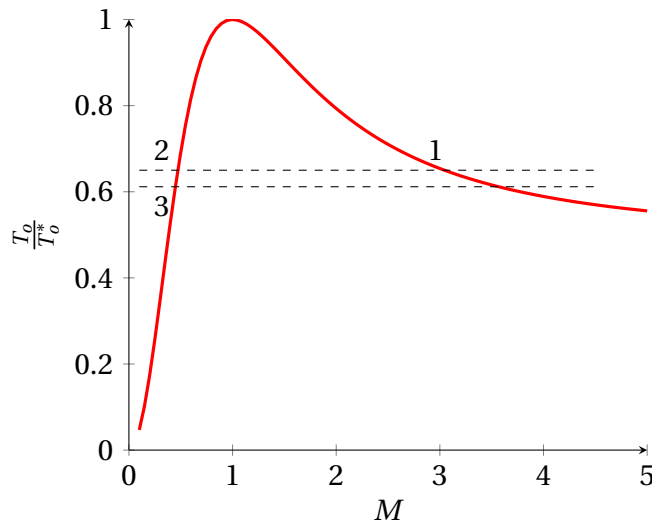


Figura 9.11 – Para escoamento supersônico estrangulado, apenas o choque normal não irá permitir a adição de calor desejada. O choque levará o escoamento para regime subsônico (2) e ocorrerá uma redução do valor de Mach (3).

EXEMPLO

Condidere o escoamento de ar com $M_1 = 3$, $T_1 = 300[K]$. Qual a quantidade de calor necessária para levar o escoamento para $M = 1$? Se for adicionado 20% a mais de calor, qual será o efeito no escoamento?

■ SOLUÇÃO

A temperatura de estagnação inicial é:

$$\frac{T_o}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2 = 1 + \frac{1,4-1}{2} \cdot 3^2 = 2,8 \rightarrow T_{o1} = 840[K]$$

E a pressão de estagnação inicial é:

$$\frac{P_o}{P} = \left(\frac{T_o}{T} \right)^{\frac{k}{k-1}} = (2,8)^{\frac{1,4}{1,4-1}} = 3673[KPa]$$

Para a condição inicial, a máxima relação $\frac{T_o}{T_o^*}$ pode ser determinada pela Eq.(9.16) ou pela Tab.(B.3):

$$\frac{T_o}{T_o^*} = \frac{(k+1)M^2}{(1+k.M^2)^2} \cdot [2 + (k-1)M^2] = \frac{(1,4+1)3^2}{(1+1,4.3^2)^2} \cdot [2 + (1,4-1)3^2] = 0,653979 \rightarrow T_o^* = 1284,44[K]$$

O que resulta numa quantidade de calor máxima de:

$$q^* = c_p(T_o^* - T_o) = 1,004[KJ/kg.K](1284,44 - 840)[K] = 446,22[KJ/kg]$$

Se a quantidade de calor é 20% maior, temos $q = 535,47[KJ/kg]$. Assim a temperatura de estagnação na saída será de:

$$T_o^* = T_o + \frac{q}{c_p} = 840 + \frac{535,47}{1,004} = 1373,33[K]$$

A nova razão entre as temperaturas de estagnação será de:

$$\frac{T_o}{T_o^*} = \frac{840}{1373,33} = 0,61165$$

Da Tab(B.3), fazendo uma aproximação por interpolação linear obtém-se o novo valor de Mach na entrada de $M_1 = 0,4487$.

Vamos analisar também o que ocorre durante o processo transiente. À partir do estado inicial 1, ocorrerá o choque (estado 2) e finalmente o estado final 3 será obtido. Para a condição inicial de $M_1 = 3$, temos da Tab.(B.2):

M_1	M_2	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{P_2}{P_1}$	ds
3	0,475191	2,679012	10,33	0,319630

Assim, após o choque as condições do escoamento serão:

- $\frac{T_2}{300} = 2,679017 \rightarrow T_2 = 803,7036[K]$
- $\frac{P_2}{100} = 10,33 \rightarrow P_2 = 1033,33[KPa]$
- $s_2 - 6,86926 = 0,319630 \rightarrow s_2 = 7,18889[KJ/kg.K]$
- $T_{o2} = T_{o1} = 840[K]$
- $\frac{P_{o2}}{P_2} = \left(\frac{T_{o2}}{T_2}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{840}{803,7037}\right)^{3,5} \rightarrow P_{o2} = 1206,093[KPa]$

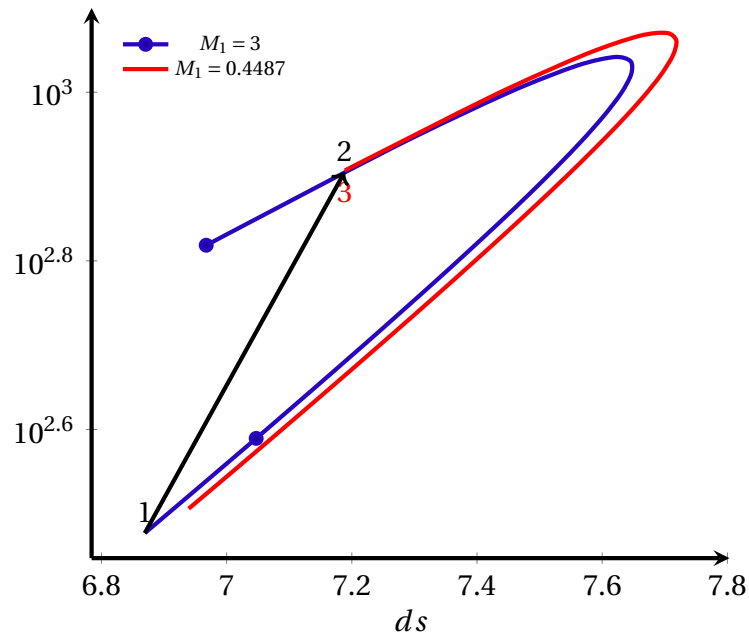
Após o choque o processo transiente continua, levando o novo Mach de entrada para $M_3 = 0,4487$, conforme já determinado. Para essa condição, a temperatura final pode ser calculada, considerando que a temperatura e pressão de estagnação não se alteram:

$$\frac{T_{o3}}{T_3} = 1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2 = 1 + \frac{1,4-1}{2} \cdot 0,4487^2 \rightarrow \frac{840}{T_3} = 1,04 \rightarrow T_3 = 807,48[K]$$

$$\frac{P_{o3}}{P_3} = \left(\frac{T_{o3}}{T_3}\right)^{\frac{k}{k-1}} \rightarrow \frac{1206,093}{P_3} = 1,04^{3,5} \rightarrow P_3 = 1050,45[KPa]$$

E a entropia é constante no processo:

$$s_3 = 7,18889[KJ/kg.K]$$



■ CONSIDERAÇÕES

Para $M_1 = 3$ da Tab(B.2) temos $M_2 = 0,475191$, o que demonstra que o Mach na entrada irá diminuir em relação ao valor subsônico após o choque, que não altera a temperatura de estagnação.

Escoamento Unidimensional permanente com atrito

Vamos considerar um escoamento unidimensional, em regime permanente, num duto de área constante.

O atrito é modelado como uma força de superfície, sendo um efeito dissipativo, que resulta em aumento da entropia. À partir das equações governantes, continuidade, momento e energia, iremos modelar esse tipo de escoamento e determinar a variação das propriedades nos regimes subsônico e supersônico.

Da equação da continuidade para regime permanente, unidimensional com área constante, temos:

$$\rho_1 \cdot V_1 = \rho_2 \cdot V_2 = \rho \cdot V = \text{constante} \quad (10.1)$$

Derivando a equação:

$$\begin{aligned} d(\rho \cdot V) &= 0 \\ \rho \cdot dV + V \cdot d\rho &= 0 \end{aligned}$$

E dividindo pela própria equação da continuidade:

$$\frac{\rho \cdot dV}{\rho \cdot V} + \frac{V \cdot d\rho}{\rho \cdot V} = 0$$

Obtemos os termos de dilatação, que relacionam, para área constante, a variação na massa específica com a variação na velocidade do escoamento.

$$\boxed{\frac{dV}{V} + \frac{d\rho}{\rho} = 0} \quad (10.2)$$

Como o escoamento é adiabático, do balanço de energia, temos que:

$$h_{01} = h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = h_{02} \quad (10.3)$$

A entalpia de estagnação do escoamento é constante, assim como a temperatura de estagnação, pois $h = c_p \cdot T$. A entalpia de estagnação pode ser determinada à partir da entalpia de estagnação, por:

$$T_0 = T + \frac{V^2}{2 \cdot c_p} = \text{constante} \quad (10.4)$$

Fazendo a derivação, temos:

$$dT_0 = dT + \frac{2VdV}{2.c_p} = 0$$

Logo,

$$dT = -V \frac{dV}{c_p} \quad (10.5)$$

Da definição de Mach, temos que $V = M\sqrt{k.R.T}$. Podemos escrever a equação da velocidade como:

$$V = M\sqrt{k.R.T}$$

$$V = \frac{V^2}{V} = \frac{M^2.k.R.T}{V}$$

Substituindo na Eq.10.5:

$$dT = -\frac{M^2.k.R.T}{V} \cdot \frac{dV}{c_p} \frac{dT}{T} = -M^2 \frac{k.R}{c_p} \frac{dV}{V}$$

O termo $\frac{k.R}{c_p}$ pode ser reescrito como:

$$\frac{k.R}{c_p} = k \frac{c_p - c_v}{c_p} = k \left(\frac{c_p}{c_p} - \frac{c_v}{c_p} \right) = k \left(1 - \frac{1}{k} \right) = k \left(\frac{k-1}{k} \right) = k-1$$

Assim:

$$\boxed{\frac{dT}{T} = -(k-1)M^2 \frac{dV}{V}} \quad (10.6)$$

Da equação dos gases ideais $P = \rho.R.T$, podemos escrever:

$$R.T = \frac{P}{\rho} \quad (10.7)$$

e

$$R.\rho = \frac{P}{T} \quad (10.8)$$

e de sua derivação, temos:

$$dP = R.T.d\rho + R.\rho.dT$$

Substituindo:

$$dP = \frac{P}{\rho}.d\rho + \frac{P}{T}.dT$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}$$

Substituindo as Eq.10.2 e Eq.10.6:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{dV}{V} + \frac{dT}{T}$$

$$\frac{dP}{P} = -\frac{dV}{V} - (k-1)M^2 \frac{dV}{V}$$

$$\boxed{\frac{dP}{P} = -\frac{dV}{V} [1 + (k-1)M^2]} \quad (10.9)$$

Da definição do número do Mach, temos $M^2 = \frac{V^2}{k.R.T}$. Fazendo a sua derivação:

$$\begin{aligned}
2MdM &= \frac{2VdV}{k.R.T} - \frac{V^2}{k.R} \frac{dT}{T^2} \\
2MdM &= \frac{2V.V}{V} \frac{1}{c^2} dV - \frac{V^2}{k.R.T.T} dT \\
2MdM &= 2M^2 \frac{dV}{V} - M^2 \frac{dT}{T} \\
\frac{dM}{M} &= \frac{dV}{V} - \frac{1}{2} \frac{dT}{T}
\end{aligned}$$

Substituindo a Eq.10.6:

$$\begin{aligned}
\frac{dM}{M} &= \frac{dV}{V} - \frac{1}{2} \left[-(k-1)M^2 \frac{dV}{V} \right] \\
\boxed{\frac{dM}{M} &= \frac{dV}{V} \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)} \quad (10.10)
\end{aligned}$$

Das equações de Gibbs:

$$\begin{aligned}
Tds &= du + Pdv \\
Tds &= dh - v dP \quad (10.11)
\end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned}
ds &= c_p \frac{dT}{T} - \frac{v}{T} dP \\
ds &= c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dP}{P} \\
ds &= R \left[\frac{c_p}{R} \frac{dT}{T} - \frac{dP}{P} \right]
\end{aligned}$$

O termo $\frac{c_p}{R}$ pode ser reescrito como:

$$\frac{c_p}{R} = \frac{c_p}{c_p - c_v} = \frac{\frac{c_p}{c_v}}{\frac{c_p}{c_p} - \frac{c_v}{c_p}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} = \frac{1}{\frac{k-1}{k}} = \frac{k}{k-1}$$

Logo:

$$ds = R \left[\frac{k}{k-1} \frac{dT}{T} - \frac{dP}{P} \right]$$

Substituindo as Eq.10.6 e Eq.10.9:

$$\begin{aligned}
ds &= R \left[\frac{k}{k-1} \left(-(k-1)M^2 \frac{dV}{V} \right) + \frac{dV}{V} (1 + (K-1)M^2) \right] \\
ds &= R \left[-kM^2 \frac{dV}{V} + \frac{dV}{V} (1 + (K-1)M^2) \right] \\
ds &= R \left[-kM^2 \frac{dV}{V} + \frac{dV}{V} + kM^2 \frac{dV}{V} - M^2 \frac{dV}{V} \right] \\
ds &= R \left[\frac{dV}{V} - M^2 \frac{dV}{V} \right] \\
ds &= R(1 - M^2) \frac{dV}{V} \quad (10.12)
\end{aligned}$$

Podemos reescrever todos os termos de derivação em função da variação da entropia, que é sempre positiva, independente do regime de escoamento.

10.1 Variação da velocidade

$$\boxed{\frac{dV}{V} = \frac{ds}{R(1 - M^2)}} \quad (10.13)$$

- Para regime subsônico, o termo $1 - M^2 > 0$. Assim:

$$\frac{dV}{V} = \frac{(>0)}{(>0)} = > 0$$

- Para regime supersônico, o termo $1 - M^2 < 0$. Assim:

$$\frac{dV}{V} = \frac{(>0)}{(<0)} = < 0$$

Logo, para escoamento de Fanno, a velocidade aumenta em função do atrito para escoamento subsônico e diminui para regime supersônico.

10.2 Variação da massa específica

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V}$$

$$\boxed{\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{ds}{R(1 - M^2)}} \quad (10.14)$$

- Para regime subsônico, o termo $1 - M^2 > 0$. Assim:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{(>0)}{(>0)} = < 0$$

- Para regime supersônico, o termo $1 - M^2 < 0$. Assim:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{(>0)}{(<0)} = > 0$$

Logo, para escoamento de Fanno, a massa específica diminui em função do atrito para escoamento subsônico e aumenta para regime supersônico.

10.3 Variação da temperatura

$$\frac{dT}{T} = -(k-1)M^2 \frac{dV}{V}$$

$$\frac{dT}{T} = -(k-1)M^2 \frac{ds}{R(1 - M^2)}$$

$$\boxed{\frac{dT}{T} = -\frac{k-1}{R} \frac{M^2}{1 - M^2} ds} \quad (10.15)$$

- Para regime subsônico, o termo $1 - M^2 > 0$. Assim:

$$\frac{dT}{T} = -(> 0) \cdot \frac{(> 0)}{(> 0)} = < 0$$

- Para regime supersônico, o termo $1 - M^2 < 0$. Assim:

$$\frac{dV}{V} = -(> 0) \frac{(> 0)}{(< 0)} = > 0$$

Logo, para escoamento de Fanno, a temperatura diminui em função do atrito para escoamento subsônico e aumenta para regime supersônico.

10.4 Variação da pressão

$$\frac{dP}{P} = -\frac{dV}{V} [1 + (k-1)M^2]$$

$$\boxed{\frac{dP}{P} = -\frac{ds}{R(1-M^2)} [1 + (k-1)M^2]} \quad (10.16)$$

- Para regime subsônico, o termo $1 - M^2 > 0$. Assim:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{(> 0)}{(> 0)} (> 0) = < 0$$

- Para regime supersônico, o termo $1 - M^2 < 0$. Assim:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{(> 0)}{(< 0)} (> 0) = > 0$$

Logo, para escoamento de Fanno, a pressão diminui em função do atrito para escoamento subsônico e aumenta para regime supersônico.

10.5 Variação de Mach

$$\frac{dM}{M} = \frac{dV}{V} \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)$$

$$\boxed{\frac{dM}{M} = \frac{1}{R(1-M^2)} \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)} \quad (10.17)$$

- Para regime subsônico, o termo $1 - M^2 > 0$. Assim:

$$\frac{dM}{M} = \frac{1}{(> 0)} (> 0) = > 0$$

- Para regime supersônico, o termo $1 - M^2 < 0$. Assim:

$$\frac{dM}{M} = \frac{1}{(< 0)} (> 0) = < 0$$

Logo, para escoamento de Fanno, o número de Mach aumenta em função do atrito para escoamento subsônico e diminui para regime supersônico.

10.6 Equação para as propriedades na saída em função das propriedades na entrada

Até agora obtemos as relações das variações das propriedades no escoamento de Fanno. Vamos agora obter as equações que permitem calcular as propriedades na saída do escoamento em função das propriedades na entrada.

10.6.1 Mach

Da equação do momento:

$$\frac{d(m\vec{V})}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \cdot \vec{V} dV + \int_{SC} (\rho \cdot \vec{V} d\vec{A}) \vec{V} = \sum \vec{F}$$

Considerando regime permanente, escoamento unidimensional, desprezando forças de corpo e considerando as forças de superfície devido à pressão e à tensão de cisalhamento:

$$\int_{SC} (\rho \vec{V} d\vec{A}) \vec{V} = - \int_{A_t} P d\vec{A}_t - \int_{A_s} \tau_w dA_s$$

Sendo que a pressão é integrada na área transversal ao escoamento A_t , enquanto a tensão de cisalhamento atua na área de superfície A_s

$$(\rho_1 \vec{A}_1 \vec{V}_1) \vec{V}_1 + (\rho_2 \vec{A}_2 \vec{V}_2) \vec{V}_2 = - (P_1 \vec{A}_1 + P_2 \vec{A}_2) - \int_{A_s} \tau_w dA$$

Em 1 o ângulo entre o vetor velocidade e a área é de 180° , e $\vec{A}_1 \cdot \vec{V}_1 = -V_1 \cdot A_1$. Em 2 o ângulo entre o vetor área e a velocidade é de 0° e $\vec{A}_2 \vec{V}_2 = +V_2 \cdot A_2$. Logo:

$$\begin{aligned} -\rho_1 \cdot V_1^2 \cdot A_1 + \rho_2 \cdot V_2^2 \cdot A_2 &= -P_1 \cdot A_2 + P_2 \cdot A_2 - \int_{A_s} \tau_w dA \\ P_2 + \rho_2 V_2^2 - P_1 - \rho_1 V_1^2 &= -\frac{1}{A_t} \int_{A_s} \tau_w dA \\ dP + d(\rho \cdot V^2) &= -\frac{1}{A_t} \int_{A_s} \tau_w dA \end{aligned} \quad (10.18)$$

Para um duto de seção circular:

$$A_t = \frac{\pi D^2}{4} \quad (10.19)$$

e

$$A_s = \pi \cdot D \cdot L \quad (10.20)$$

Substituindo:

$$\begin{aligned} dP + d(\rho \cdot V^2) &= -\frac{4}{\pi D^2} \int_0^L \pi D \tau_w dx \\ dP + d(\rho \cdot V^2) &= -\frac{4}{D} \int_0^L \tau_w dx \end{aligned} \quad (10.21)$$

A tensão de cisalhamento τ_w pode ser representada em função do coeficiente de atrito f :

$$f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho \cdot V^2} \quad (10.22)$$

A parcela $\frac{\rho \cdot V^2}{2}$ é a parcela da energia cinética específica escrita em unidades de pressão.

$$e = u + P.v + \frac{V^2}{2} + g.z$$

$$\frac{e}{v} = \frac{u}{v} + P + \frac{V^2}{2v} + \frac{g.z}{v}$$

$$\frac{V^2}{2v} = \frac{\rho V^2}{2}$$

Assim:

$$\tau_w = \frac{\rho V^2}{2} f \quad (10.23)$$

A equação do momento pode ser escrita como:

$$dP + d(\rho.V^2) = -\frac{4}{D} \frac{1}{2} \rho.V^2.f.dx \quad (10.24)$$

O termo $\rho.V^2$ pode ser escrito como $(\rho.V).V$. Aplicando a regra da cadeia:

$$(\rho.V).dV + Vd(\rho.V)$$

mas, da equação da continuidade $d(\rho.V) = 0$. Assim:

$$dP + \rho.V.dV = -\frac{4}{D} \frac{1}{2} \rho.V^2.f.dx \quad (10.25)$$

A massa específica será escrita como $\rho = \frac{P}{R.T}$. Temos também que $V = M\sqrt{k.R.T}$. Logo:

$$V^2 = M^2 k.R.T$$

e

$$V = \frac{V^2}{V} = \frac{M^2.k.R.T}{V} \quad (10.26)$$

Substituindo na Eq.10.25:

$$dP + \left(\frac{P}{R.T}\right) \cdot \left(\frac{M^2.k.R.T}{V} dV\right) = -\frac{4}{D} \frac{1}{2} \left(\frac{P}{R.T}\right) \cdot (M^2.k.R.T).f.dx$$

$$dP + P.k.M^2 \frac{dV}{V} = -\frac{4}{D} \frac{1}{2} P.K M^2 f dx$$

$$\frac{dP}{P} + M^2 \frac{dV}{V} = -\frac{4}{D} \frac{1}{2} M^2 k.f.dx$$

Substituindo a Eq.10.9:

$$-\frac{dV}{V} [1 + (k-1)M^2] + M^2 \frac{dV}{V} = -\frac{4}{D} \frac{1}{2} M^2 k.f.dx$$

$$\frac{dV}{V} [M^2 k - 1 - M^2 k + M^2] = -\frac{4}{D} \frac{1}{2} M^2 k.f.dx$$

$$\frac{dV}{V} \left(\frac{M^2 - 1}{k.M^2}\right) = -\frac{4}{D} \frac{1}{2} f.dx$$

Substituindo a Eq.10.10

$$\frac{\frac{dM}{M}}{\left[1 + \frac{k-1}{2} M^2\right]} \left(\frac{M^2 - 1}{k.M^2}\right) = -\frac{4}{D} \frac{1}{2} f.dx$$

$$\frac{4.f.dx}{D} = 2 \frac{(1-M^2)}{k.M^2} \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{-1} \frac{dM}{M} \quad (10.27)$$

Integrando:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{4.f.dx}{D} = \left[-\frac{1}{k.M^2} - \frac{(k+1)}{2.k} \ln \left(\frac{M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \right) \right]_{M_1}^{M_2} \quad (10.28)$$

A parcela positiva entre colchetes na equação é denominada função de Fanno, e depende apenas do Mach local:

$$F(M) = \left[\frac{1}{k.M^2} + \frac{(k+1)}{2.k} \ln \left(\frac{M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \right) \right] \quad (10.29)$$

Assim:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{4.f.dx}{D} = F(M_1) - F(M_2) \quad (10.30)$$

A integral no lado esquerdo da equação é sempre positiva. Assim:

$$F(M_1) - F(M_2) > 0 \quad (10.31)$$

O gráfico da função de Fanno é:

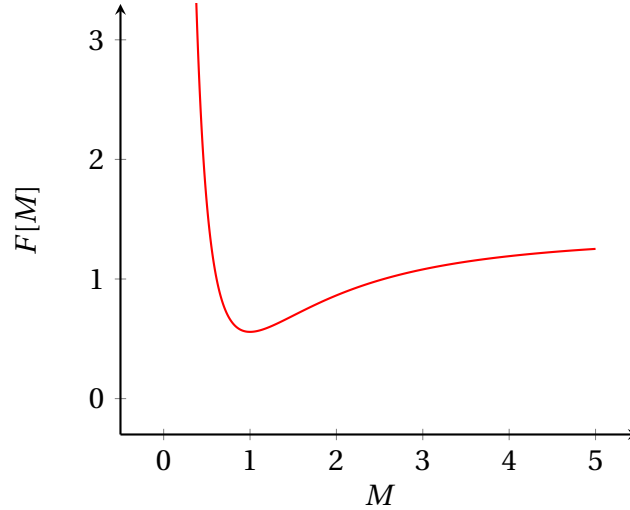


Figura 10.1 – No regime subsônico a função de Fanno diminui com aumento de Mach, assim, para $M_2 > M_1 \rightarrow F(M_2) < F(M_1)$, o que implica que o atrito acelera o escoamento subsônico; no regime supersônico, para $M_2 > M_1$ temos $F(M_2) > F(M_1)$ indicando que o atrito deve desacelerar o escoamento no regime supersônico.

10.6.2 Temperatura

A temperatura de estagnação é constante no escoamento. Assim

$$T_{01} = T_{02}$$

Mas $T_0 = T \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)$. Logo:

$$\begin{aligned}
T_1 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right) &= T_2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_2^2 \right) \\
\frac{T_2}{T_1} &= \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \right) \\
\boxed{\frac{T_2}{T_1} &= \left(\frac{2 + (k-1) M_1^2}{2 + (k-1) M_2^2} \right)} \quad (10.32)
\end{aligned}$$

10.6.3 Pressão

Da equação da continuidade e da equação dos gases ideais ($\rho = \frac{P}{R.T}$)

$$\begin{aligned}
\rho_1 V_1 &= \rho_2 V_2 \\
\frac{P_1}{R.T_1} \cdot V_1 &= \frac{P_2}{R.T_2} \cdot V_2
\end{aligned}$$

Escrevendo a velocidade em função de Mach:

$$\begin{aligned}
\frac{P_1}{R.T_1} \cdot M_1 \sqrt{k.R.T_1} &= \frac{P_2}{R.T_2} \cdot M_2 \sqrt{k.R.T_2} \\
\frac{P_2}{P_1} &= \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Substituindo a Eq.10.32:

$$\boxed{\frac{P_2}{P_1} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{2 + (k-1) M_1^2}{2 + (k-1) M_2^2} \right)^{1/2}} \quad (10.33)$$

10.6.4 Pressão de estagnação

Das equações isoentrópicas, temos:

$$\frac{P_0}{P} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{k-1}{k}}$$

Assim:

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{P_2}{P_1} \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{k-1}{k}}$$

Substituindo a Eq.10.33:

$$\begin{aligned}
\frac{P_{02}}{P_{01}} &= \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{2 + (k-1) M_1^2}{2 + (k-1) M_2^2} \right)^{1/2} \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{k-1}{k}} \\
\frac{P_{02}}{P_{01}} &= \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{2 + (k-1) M_1^2}{2 + (k-1) M_2^2} \right)^{1/2} \left(\frac{2 + (k-1) M_2^2}{2 + (k-1) M_1^2} \right)^{\frac{k-1}{k}} \\
\frac{P_{02}}{P_{01}} &= \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{2 + (k-1) M_1^2}{2 + (k-1) M_2^2} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (10.34)
\end{aligned}$$

10.6.5 Massa específica

Da equação dos gases ideais $\rho = \frac{P}{RT}$, temos que:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{R \cdot T_1}{R \cdot T_2} = \frac{P_2}{P_1} \frac{T_1}{T_2}$$

Logo:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{2 + (k-1)M_1^2}{2 + (k-1)M_2^2} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{2 + (k-1)M_2^2}{2 + (k-1)M_1^2} \right)^{1/2}$$

$$\boxed{\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{2 + (k-1)M_2^2}{2 + (k-1)M_1^2} \right)^{1/2}} \quad (10.35)$$

EXEMPLO

Considere o escoamento ao longo de um duto de área de seção transversal constante, com diâmetro de 0,15[m] e comprimento de 30[m]. As condições na entrada são $M_1 = 0,2$, $P_1 = 1[atm]$ e $T_1 = 300[K]$. Assumindo fator de atrito $f = 0,005$, determine as propriedades na saída do duto.

■ SOLUÇÃO

Vamos determinar todas as propriedades na entrada do duto antes de iniciar a solução:

$$\rho_1 = \frac{P_1}{R \cdot T_1} = \frac{100[KPa]}{0,287[KJ/kg.K] \cdot 300[K]} = 1,1614[kg/m^3]$$

As propriedades de estagnação na entrada podem ser determinadas pelas fórmulas para escoamento isoentrópico ou pela Tab.(B.1):

$$\frac{T_{o1}}{T_1} = 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 = 1,018 \rightarrow T_{o1} = 305,4[K]$$

$$\frac{P_{o1}}{P_1} = \left(\frac{T_{o1}}{T_1} \right)^{\frac{k}{k-1}} = 1,43 \rightarrow P_{o1} = 1,43[atm]$$

Podemos determinar o Mach na saída com a Eq.(10.28):

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{4 \cdot f \cdot dx}{D} = \left[-\frac{1}{k \cdot M^2} - \frac{(k+1)}{2 \cdot k} \ln \left(\frac{M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \right) \right]_{M_1}^{M_2}$$

$$\frac{4 \cdot 0,005 \cdot 30}{0,15} = \left[-\frac{1}{1,4 \cdot M_2^2} - \frac{(1,4+1)}{2 \cdot 1,4} \ln \left(\frac{M_2^2}{1 + \frac{1,4-1}{2} M_2^2} \right) \right] - \left[-\frac{1}{1,4 \cdot 0,2^2} - \frac{(1,4+1)}{2 \cdot 1,4} \ln \left(\frac{0,2^2}{1 + \frac{1,4-1}{2} 0,2^2} \right) \right]$$

$$4 = \left[-\frac{1}{1,4 \cdot M_2^2} - \frac{(1,4+1)}{2 \cdot 1,4} \ln \left(\frac{M_2^2}{1 + \frac{1,4-1}{2} M_2^2} \right) \right] + 5,8572$$

$$1,8572 = \left[-\frac{1}{1,4 \cdot M_2^2} + \frac{(1,4+1)}{2 \cdot 1,4} \ln \left(\frac{M_2^2}{1 + \frac{1,4-1}{2} M_2^2} \right) \right]$$

A equação tem como única incógnita o valor de M_2 e pode ser resolvida por um processo de iteração.

M	LE=1,8572
0,4	2,8665
0,5	1,6270
0,45	2,12443678128126
0,46	2,00892144879448
0,47	1,90214485463431
0,48	1,80335138865775
0,471	1,89191802924362
0,472	1,88177026079389
0,473	1,87170084649382
0,474	1,86170909109715
0,475	1,85179430680659
0,4741	1,86071416025296
0,4742	1,85971999843003
0,4743	1,85872660494538
0,4744	1,85773397911673
0,4745	1,85674212026256

Obtemos assim o valor de $M_2 \approx 0,4745$. Podemos agora calcular todas as demais propriedades na saída:

$$\frac{T_2}{T_1} = 0,9741 \rightarrow T_2 = 292,24[K]$$

$$\frac{P_2}{P_1} = 0,624 \rightarrow P_2 = 0,62[atm]$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 0,64 \rightarrow \rho_2 = 0,74[kg/m^3]$$

10.7 Condição sônica em escoamento de Fanno

Um escoamento de Fanno em regime subsônico é acelerado e em regime supersônico é desacelerado. Dessa forma, podemos levar o escoamento para Mach=1, independente do regime. O comprimento necessário do duto será denominado comprimento sônico e representado como L^* . As propriedades nessa condição serão chamadas de propriedades sônicas e representadas por $*$.

A condição sônica é, portanto, a condição que existirá se houver um comprimento suficiente para levar o escoamento na estrada para Mach=1. Ela é, fundamentalmente, diferente da condição crítica que consideramos em choque, em que a condição de Mach=1 é atingida isentropicamente.

As propriedades na condição sônica são constantes e podem ser utilizadas como referência, dependendo apenas do Mach local do escoamento e do fluido. Dessa forma, é possível tabular a razão entre as propriedades na estrada e as propriedades sônicas.

Seja $M_2 = 1$. Assim, $T_2 = T^*$, $P_2 = P^*$, $\rho_2 = \rho^*$ e $P_{02} = P^*$. Podemos obter as equações para as propriedades sônicas:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{2 + (k-1)M_1^2}{2 + (k-1)M_2^2} \right)$$

$$\frac{T^*}{T} = \left(\frac{2 + (k-1)M^2}{2 + (k-1)} \right)$$

$$\boxed{\frac{T^*}{T} = \left(\frac{2 + (k-1)M^2}{k+1} \right)} \quad (10.36)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{2 + (k-1)M_1^2}{2 + (k-1)M_2^2} \right)^{1/2}$$

$$\frac{P^*}{P} = \frac{M}{1} \left(\frac{2 + (k-1)M^2}{2 + (k-1)} \right)^{1/2}$$

$$\boxed{\frac{P^*}{P} = M \left(\frac{2 + (k-1)M^2}{k+1} \right)^{1/2}} \quad (10.37)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{2 + (k-1)M_2^2}{2 + (k-1)M_1^2} \right)^{1/2}$$

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{M}{1} \left(\frac{2 + (k-1)1^2}{2 + (k-1)M^2} \right)^{1/2}$$

$$\boxed{\frac{\rho^*}{\rho} = M \left(\frac{k+1}{2 + (k-1)M^2} \right)^{1/2}} \quad (10.38)$$

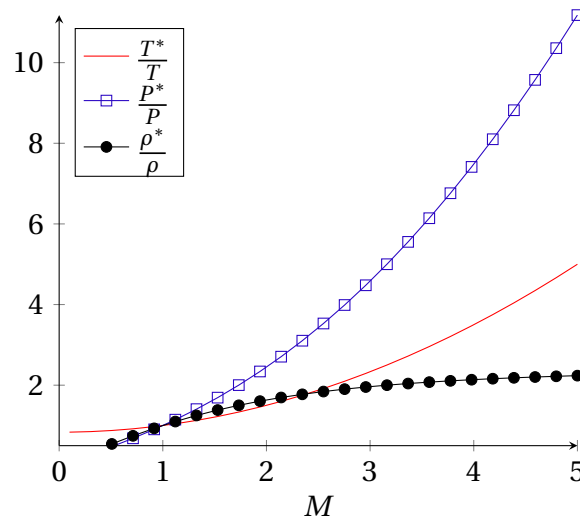


Figura 10.2 – Razão entre propriedades sônica e de entrada em função do número de Mach para o ar ($k=1,4$)

EXEMPLO

Considere o escoamento ao longo de um duto de área de seção transversal constante, com diâmetro de 0,15[m] e comprimento de 30[m]. As condições na entrada são $M_1 = 0,2$, $P_1 = 1[atm]$ e $T_1 = 300[K]$. Assumindo fator de atrito $f = 0,005$, determine as propriedades na saída do duto.

■ SOLUÇÃO

Vamos resolver utilizando a Tab.(B.4). Para $M_1 = 0,3$, temos:

M	$\frac{T}{T^*}$	$\frac{P}{P^*}$	$\frac{\rho}{\rho^*}$	$\frac{P_o}{P_o^*}$	$\frac{4fL^*}{D}$
0,3	1,17878	3,61906	3,07017	2,03507	5,29925

Logo:

$$\begin{aligned}\frac{T_1}{T^*} &= 1,17878 \rightarrow T^* = 254,50[K] \\ \frac{P_1}{P^*} &= 3,61906 \rightarrow P^* = 0,2763[atm] \\ \frac{\rho_1}{\rho^*} &= 3,07017 \rightarrow \rho^* = 0,3782[kg/m^3] \\ \frac{4fL^*}{D} &= 5,29925 \rightarrow L^* = 39,74[m]\end{aligned}$$

Observamos que o comprimento necessário para levar o escoamento à condição sônica é de 39,74[m], que é maior do que o comprimento real do duto. Assim, a condição na saída será subsônica. O comprimento necessário para levar o escoamento na saída para sônico é:

$$L_2 = L^* - L \rightarrow L_2 = 39,74 - 30 = 9,74[m]$$

Podemos calcular o fator $\frac{4fL}{D}$:

$$\frac{4.f.L}{D} = \frac{4.0,005.9,74}{0,15} = 1,29925$$

Vamos buscar esse valor na Tab.(B.4), para Mach subsônico:

M	$\frac{T}{T^*}$	$\frac{P}{P^*}$	$\frac{\rho}{\rho^*}$	$\frac{P_o}{P_o^*}$	$\frac{4fL^*}{D}$
0,46	1,15128	2,33256	2,02606	1,42463	1,45091
0,48	1,14714	2,23135	1,94514	1,38010	1,24534

Observamos que o valor se encontra entre $0,46 < M < 0,48$. Como estamos utilizando a tabela, podemos fazer uma aproximação por interpolação linear, obtendo:

M_2	$\frac{T_2}{T^*}$	$\frac{P_2}{P^*}$	$\frac{\rho_2}{\rho^*}$	$\frac{P_{o2}}{P_{o^*}}$	$\frac{4fL_2}{D}$
0,4747	1,1482	2,23135	1,94514	1,3918	1,29925

Como os valores sônicos já foram calculados, temos:

$$\begin{aligned}T_2 &= 292,22[K] \\ P_2 &= 0,62[atm] \\ \rho_2 &= 0,74[kg/m^3]\end{aligned}$$

10.8 Diagrama de Fanno

A presença do atrito aumenta a entropia do escoamento. No regime subsônico o escoamento de Fanno acelera, podendo atingir a condição sônica se $L = L^*$. No regime supersônico o escoamento desacelera, também podendo ser levado à condição sônica se $L = L^*$. Em $M = 1$ o escoamento está estrangulado. O escoamento subsônico não irá acelerar para o regime supersônico, assim como o supersônico não desacelerará para subsônico. O que ocorre se o comprimento for maior do que o comprimento sônico L^* é que as propriedades na estrada do escoamento serão alteradas:

- No regime subsônico: se $L > L^*$, M_1 irá diminuir.
- No regime supersônico: se $L > L^*$, M_1 irá aumentar.

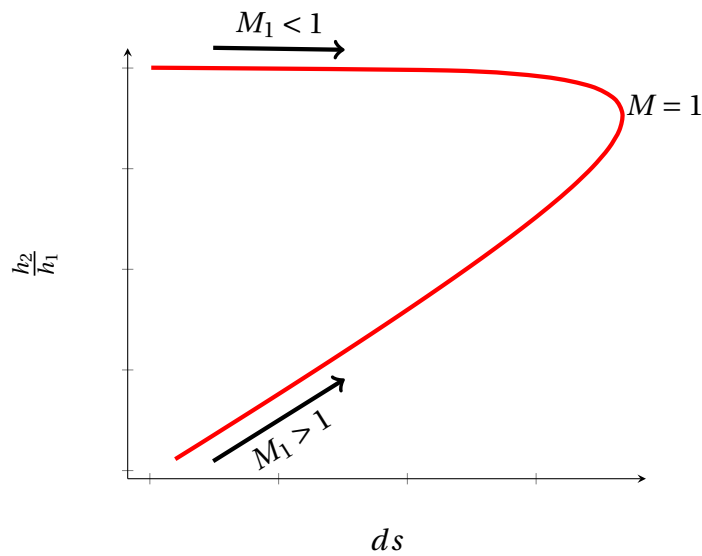


Figura 10.3 – Diagrama de Fanno (ds vs h). Em x temos o valor da variação da entropia, calculada por $ds = c_P \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - R \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right)$ e no eixo y o valor logarítmico da razão de entalpia ou temperatura $\frac{h_2}{h_1} = \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{2+(k-1)M_1^2}{2+(k-1)M_2^2} \right)$.

Equações

A.1 Propriedades para ar

$$k = 1,4; R = 287[J/KgK]; c_p = 1004,5[J/KgK];$$

A.2 Equações para gases ideais

$$c_p - c_v = R \quad (A.1)$$

$$k = \frac{c_p}{c_v} \quad (A.2)$$

$$Pv = mRT \quad (A.3)$$

$$s_2 - s_1 = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \quad (A.4)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^k = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (A.5)$$

A.2.1 Velocidade do som

$$c = \sqrt{KRT} \quad (A.6)$$

$$M = \frac{V}{c} \quad (A.7)$$

A.3 Escoamento Unidimensional em regime permanente

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (A.8)$$

$$P_2 + \rho_2 V_2^2 = P_1 + \rho_1 V_1^2 \quad (A.9)$$

$$q + h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \quad (A.10)$$

A.4 Equações para escoamento isoentrópico

$$\frac{T_o}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{P_o}{P} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\rho_o}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{T^*}{T_o} = \frac{2}{k+1} \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{P^*}{P_o} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_o} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (\text{A.16})$$

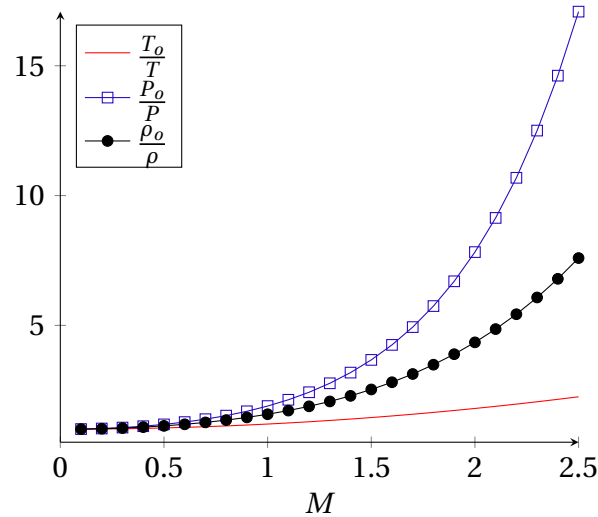


Figura A.1 – Razão entre propriedades de estagnação e estáticas em função do número de Mach para o ar ($k=1,4$)

A.5 Equações para Choque Normal

$$M_2^2 = \frac{1 + [\frac{k-1}{2}]M_1^2}{kM_1^2 - \frac{k-1}{2}} \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{(k+1)M_1^2}{2 + (k-1)M_1^2} \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2k}{k+1}(M_1^2 - 1) \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{h_2}{h_1} = \left[1 + \frac{2k}{k+1}(M_1^2 - 1) \right] \left[\frac{2 + (k-1)M_1^2}{(k+1)M_1^2} \right] \quad (\text{A.20})$$

$$s_2 - s_1 = -R \ln \frac{P_{o2}}{P_{o1}} \quad (\text{A.21})$$

A.6 Equações para Escoamento de Rayleigh

Escoamento Unidimensional permanente com troca de calor

$$q = c_p(T_{o2} - T_{o1}) \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} \right)^2 \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2 \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{1 + kM_2^2}{1 + kM_1^2} \right) \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^2 \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{P_{o2}}{P_{o1}} = \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2}M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2}M_1^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{T_{o2}}{T_{o1}} = \left(\frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} \right)^2 \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2 \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2}M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2}M_1^2} \right) \quad (\text{A.27})$$

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1 + k}{1 + kM^2} \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{T}{T^*} = M^2 \left(\frac{1 + k}{1 + kM^2} \right)^2 \quad (\text{A.29})$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1}{M^2} \left(\frac{1 + kM^2}{1 + k} \right) \quad (\text{A.30})$$

$$\frac{P_o}{P_o^*} = \frac{1 + k}{1 + kM^2} \left[\frac{2 + (k-1)M^2}{k+1} \right]^{\frac{k}{k-1}} \quad (\text{A.31})$$

$$\frac{T_o}{T_o^*} = \frac{(k+1)M^2}{(1 + kM^2)^2} [2 + (k-1)M^2] \quad (\text{A.32})$$

A.7 Equações para Escoamento de Fanno

Escoamento unidimensional permanente adiabático com atrito

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{4 \cdot f \cdot d_X}{D} = \left[-\frac{1}{k \cdot M^2} - \frac{k+1}{2k} \cdot \ln \left(\frac{M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \right) \right]_{M_1}^{M_2} \quad (\text{A.33})$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2 + (k-1)M_1^2}{2 + (k-1)M_2^2} \quad (\text{A.34})$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{2 + (k-1)M_1^2}{2 + (k-1)M_2^2} \right]^{1/2} \quad (\text{A.35})$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{2 + (k-1)M_1^2}{2 + (k-1)M_2^2} \right]^{-1/2} \quad (\text{A.36})$$

$$\frac{P_{o2}}{P_{o1}} = \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{2 + (k-1)M_2^2}{2 + (k-1)M_1^2} \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (\text{A.37})$$

$$\frac{T^*}{T} = \frac{2 + (k-1)M^2}{k+1} \quad (\text{A.38})$$

$$\frac{P^*}{P} = M \left[\frac{2 + (k-1)M^2}{k+1} \right]^{1/2} \quad (\text{A.39})$$

$$\frac{\rho^*}{\rho} = M \left[\frac{k+1}{2 + (k-1)M^2} \right]^{1/2} \quad (\text{A.40})$$

$$\frac{P_o^*}{P_o} = M \left[\frac{k+1}{2 + (k-1)M^2} \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (\text{A.41})$$

$$\frac{4 \cdot \bar{f} \cdot L^*}{D} = \frac{1 - M^2}{k \cdot M^2} + \frac{k+1}{2k} \cdot \ln \left[\frac{(k+1)M^2}{2 + (k-1)M^2} \right] \quad (\text{A.42})$$

$$\bar{f} = \frac{1}{L^*} \int_0^{L^*} f \cdot d_X \quad (\text{A.43})$$

Tabelas

Tabela B.1 – Tabela para escoamento Isoentrópico. $k = 1,4$

M	$\frac{T_o}{T}$	$\frac{P_o}{P}$	$\frac{\rho_o}{\rho}$
0,00	1,000000000	1,000000000	1,000000000
0,02	1,000080000	1,000280028	1,000200012
0,04	1,000320000	1,001120448	1,000800192
0,06	1,000720000	1,002522269	1,001800972
0,08	1,001280000	1,004487173	1,003203073
0,10	1,002000000	1,007017518	1,005007502
0,12	1,002880000	1,010116340	1,007215559
0,14	1,003920000	1,013787360	1,009828831
0,16	1,005120000	1,018034982	1,012849194
0,18	1,006480000	1,022864304	1,016278817
0,20	1,008000000	1,028281121	1,020120160
0,22	1,009680000	1,034291935	1,024375975
0,24	1,011520000	1,040903957	1,029049309
0,26	1,013520000	1,048125123	1,034143503
0,28	1,015680000	1,055964098	1,039662194
0,30	1,018000000	1,064430286	1,045609318
0,32	1,020480000	1,073533846	1,051989110
0,34	1,023120000	1,083285700	1,058806103
0,36	1,025920000	1,093697545	1,066065136
0,38	1,028880000	1,104781869	1,073771352
0,40	1,032000000	1,116551966	1,081930199
0,42	1,035280000	1,129021948	1,090547435
0,44	1,038720000	1,142206766	1,099629126
0,46	1,042320000	1,156122222	1,109181654
0,48	1,046080000	1,170784991	1,119211715
0,50	1,050000000	1,186212638	1,129726322
0,52	1,054080000	1,202423640	1,140732810
0,54	1,058320000	1,219437404	1,152238835
0,56	1,062720000	1,237274290	1,164252381
0,58	1,067280000	1,255955636	1,176781759
0,60	1,072000000	1,275503776	1,189835612
0,62	1,076880000	1,295942072	1,203422918
0,64	1,081920000	1,317294935	1,217552993
0,66	1,087120000	1,339587850	1,232235493
0,68	1,092480000	1,362847409	1,247480420

Continua na página posterior

Tabela B.1 – *Tabela para escoamento Isoentrópico. $k = 1,4$*

M	$\frac{T_o}{T}$	$\frac{P_o}{P}$	$\frac{\rho_o}{\rho}$
0,70	1,098000000	1,387101337	1,263298121
0,72	1,103680000	1,412378521	1,279699298
0,74	1,109520000	1,438709042	1,296695005
0,76	1,115520000	1,466124205	1,314296655
0,78	1,121680000	1,494656575	1,332516025
0,80	1,128000000	1,524340010	1,351365257
0,82	1,134480000	1,555209692	1,370856861
0,84	1,141120000	1,587302170	1,391003725
0,86	1,147920000	1,620655394	1,411819111
0,88	1,154880000	1,655308752	1,433316667
0,90	1,162000000	1,691303113	1,455510424
0,92	1,169280000	1,728680865	1,478414806
0,94	1,176720000	1,767485959	1,502044631
0,96	1,184320000	1,807763952	1,526415117
0,98	1,192080000	1,849562051	1,551541885
1,00	1,200000000	1,892929159	1,577440966
1,02	1,208080000	1,937915922	1,604128801
1,04	1,216320000	1,984574779	1,631622253
1,06	1,224720000	2,032960007	1,659938604
1,08	1,233280000	2,083127778	1,689095565
1,10	1,242000000	2,135136208	1,719111279
1,12	1,250880000	2,189045409	1,750004324
1,14	1,259920000	2,244917549	1,781793724
1,16	1,269120000	2,302816903	1,814498947
1,18	1,278480000	2,362809916	1,848139913
1,20	1,288000000	2,424965256	1,882737000
1,22	1,297680000	2,489353882	1,918311049
1,24	1,307520000	2,556049100	1,954883367
1,26	1,317520000	2,625126632	1,992475736
1,28	1,327680000	2,696664674	2,031110414
1,30	1,338000000	2,770743972	2,070810143
1,32	1,348480000	2,847447881	2,111598156
1,34	1,359120000	2,926862442	2,153498176
1,36	1,369920000	3,009076448	2,196534432
1,38	1,380880000	3,094181523	2,240731652
1,40	1,392000000	3,182272190	2,286115079
1,42	1,403280000	3,273445950	2,332710471
1,44	1,414720000	3,367803363	2,380544110
1,46	1,426320000	3,465448123	2,429642803
1,48	1,438080000	3,566487140	2,480033893
1,50	1,450000000	3,671030627	2,531745260
1,52	1,462080000	3,779192180	2,584805332
1,54	1,474320000	3,891088867	2,639243086
1,56	1,486720000	4,006841316	2,695088057
1,58	1,499280000	4,126573803	2,752370340
1,60	1,512000000	4,250414349	2,811120601
1,62	1,524880000	4,378494810	2,871370081
1,64	1,537920000	4,510950970	2,933150600
1,66	1,551120000	4,647922647	2,996494563
1,68	1,564480000	4,789553784	3,061434972
1,70	1,578000000	4,935992556	3,128005422

Continua na página posterior

Tabela B.1 – *Tabela para escoamento Isoentrópico. $k = 1,4$*

M	$\frac{T_o}{T}$	$\frac{P_o}{P}$	$\frac{\rho_o}{\rho}$
1,72	1,591680000	5,087391469	3,196240117
1,74	1,605520000	5,243907470	3,266173869
1,76	1,619520000	5,405702050	3,337842108
1,78	1,633680000	5,572941357	3,411280886
1,80	1,648000000	5,745796306	3,486526885
1,82	1,662480000	5,924442690	3,563617421
1,84	1,677120000	6,109061301	3,642590453
1,86	1,691920000	6,299838043	3,723484587
1,88	1,706880000	6,496964053	3,806339082
1,90	1,722000000	6,700635824	3,891193858
1,92	1,737280000	6,911055329	3,978089502
1,94	1,752720000	7,128430147	4,067067271
1,96	1,768320000	7,352973591	4,158169105
1,98	1,784080000	7,584904838	4,251437625
2,00	1,800000000	7,824449067	4,346916148
2,02	1,816080000	8,071837587	4,444648686
2,04	1,832320000	8,327307979	4,544679957
2,06	1,848720000	8,591104239	4,647055389
2,08	1,865280000	8,863476911	4,751821127
2,10	1,882000000	9,144683243	4,859024040
2,12	1,898880000	9,434987325	4,968711727
2,14	1,915920000	9,734660242	5,080932524
2,16	1,933120000	10,043980229	5,195735510
2,18	1,950480000	10,363232820	5,313170512
2,20	1,968000000	10,692711009	5,433288114
2,22	1,985680000	11,032715406	5,556139663
2,24	2,003520000	11,383554402	5,681777273
2,26	2,021520000	11,745544332	5,810253835
2,28	2,039680000	12,119009645	5,941623022
2,30	2,058000000	12,504283067	6,075939294
2,32	2,076480000	12,901705779	6,213257907
2,34	2,095120000	13,311627593	6,353634920
2,36	2,113920000	13,734407123	6,497127197
2,38	2,132880000	14,170411973	6,643792418
2,40	2,152000000	14,620018914	6,793689087
2,42	2,171280000	15,083614073	6,946876531
2,44	2,190720000	15,561593122	7,103414915
2,46	2,210320000	16,054361464	7,263365243
2,48	2,230080000	16,562334437	7,426789369
2,50	2,250000000	17,085937500	7,593750000
2,52	2,270080000	17,625606440	7,764310703
2,54	2,290320000	18,181787573	7,938535913
2,56	2,310720000	18,754937948	8,116490941
2,58	2,331280000	19,345525557	8,298241977
2,60	2,352000000	19,954029545	8,483856099
2,62	2,372880000	20,580940426	8,673401279
2,64	2,393920000	21,226760300	8,866946389
2,66	2,415120000	21,892003072	9,064561211
2,68	2,436480000	22,577194677	9,266316439
2,70	2,458000000	23,282873305	9,472283688
2,72	2,479680000	24,009589633	9,682535502

Continua na página posterior

Tabela B.1 – *Tabela para escoamento Isoentrópico. $k = 1,4$*

M	$\frac{T_o}{T}$	$\frac{P_o}{P}$	$\frac{\rho_o}{\rho}$
2,74	2,501520000	24,757907054	9,897145357
2,76	2,523520000	25,528401915	10,116187672
2,78	2,545680000	26,321663756	10,339737813
2,80	2,568000000	27,138295553	10,567872100
2,82	2,590480000	27,978913958	10,800667814
2,84	2,613120000	28,844149554	11,038203203
2,86	2,635920000	29,734647105	11,280557492
2,88	2,658880000	30,651065806	11,527810885
2,90	2,682000000	31,594079549	11,780044575
2,92	2,705280000	32,564377179	12,037340748
2,94	2,728720000	33,562662760	12,299782594
2,96	2,752320000	34,589655845	12,567454309
2,98	2,776080000	35,646091744	12,840441106
3,00	2,800000000	36,732721805	13,118829216
3,02	2,824080000	37,850313686	13,402705903
3,04	2,848320000	38,999651639	13,692159462
3,06	2,872720000	40,181536799	13,987279233
3,08	2,897280000	41,396787466	14,288155603
3,10	2,922000000	42,646239404	14,594880015
3,12	2,946880000	43,930746133	14,907544974
3,14	2,971920000	45,251179227	15,226244053
3,16	2,997120000	46,608428623	15,551071903
3,18	3,022480000	48,003402920	15,882124256
3,20	3,048000000	49,437029696	16,219497932
3,22	3,073680000	50,910255818	16,563290849
3,24	3,099520000	52,424047760	16,913602029
3,26	3,125520000	53,979391925	17,270531600
3,28	3,151680000	55,577294970	17,634180808
3,30	3,178000000	57,218784132	18,004652024
3,32	3,204480000	58,904907568	18,382048747
3,34	3,231120000	60,636734679	18,766475612
3,36	3,257920000	62,415356464	19,158038400
3,38	3,284880000	64,241885852	19,556844041
3,40	3,312000000	66,117458057	19,963000621
3,42	3,339280000	68,043230928	20,376617393
3,44	3,366720000	70,020385301	20,797804778
3,46	3,394320000	72,050125363	21,226674375
3,48	3,422080000	74,133679016	21,663338968
3,50	3,450000000	76,272298239	22,107912533
3,52	3,478080000	78,467259462	22,560510242
3,54	3,506320000	80,719863946	23,021248473
3,56	3,534720000	83,031438154	23,490244815
3,58	3,563280000	85,403334141	23,967618077
3,60	3,592000000	87,836929938	24,453488290
3,62	3,620880000	90,333629948	24,947976721
3,64	3,649920000	92,894865335	25,451205872
3,66	3,679120000	95,522094431	25,963299493
3,68	3,708480000	98,216803135	26,484382587
3,70	3,738000000	100,980505324	27,014581414
3,72	3,767680000	103,814743266	27,554023501
3,74	3,797520000	106,721088034	28,102837650

Continua na página posterior

Tabela B.1 – *Tabela para escoamento Isoentrópico. $k = 1,4$*

M	$\frac{T_o}{T}$	$\frac{P_o}{P}$	$\frac{\rho_o}{\rho}$
3,76	3,827520000	109,701139931	28,661153941
3,78	3,857680000	112,756528911	29,229103739
3,80	3,888000000	115,888915014	29,806819705
3,82	3,918480000	119,099988793	30,394435800
3,84	3,949120000	122,391471760	30,992087290
3,86	3,979920000	125,765116825	31,599910758
3,88	4,010880000	129,222708741	32,218044105
3,90	4,042000000	132,766064560	32,846626561
3,92	4,073280000	136,397034088	33,485798690
3,94	4,104720000	140,117500343	34,135702397
3,96	4,136320000	143,929380024	34,796480936
3,98	4,168080000	147,834623977	35,468278914
4,00	4,200000000	151,835217670	36,151242302
4,02	4,232080000	155,933181674	36,845518439
4,04	4,264320000	160,130572145	37,551256037
4,06	4,296720000	164,429481311	38,268605194
4,08	4,329280000	168,832037964	38,997717395
4,10	4,362000000	173,340407960	39,738745520
4,12	4,394880000	177,956794720	40,491843855
4,14	4,427920000	182,683439734	41,257168091
4,16	4,461120000	187,522623076	42,034875340
4,18	4,494480000	192,476663919	42,825124134
4,20	4,528000000	197,547921053	43,628074438
4,22	4,561680000	202,738793416	44,443887650
4,24	4,595520000	208,051720619	45,272726616
4,26	4,629520000	213,489183487	46,114755631
4,28	4,663680000	219,053704594	46,970140446
4,30	4,698000000	224,747848810	47,839048278
4,32	4,732480000	230,574223855	48,721647816
4,34	4,767120000	236,535480846	49,618109224
4,36	4,801920000	242,634314864	50,528604155
4,38	4,836880000	248,873465516	51,453305750
4,40	4,872000000	255,255717506	52,392388651
4,42	4,907280000	261,783901208	53,346029003
4,44	4,942720000	268,460893247	54,314404467
4,46	4,978320000	275,289617087	55,297694220
4,48	5,014080000	282,273043616	56,296078965
4,50	5,050000000	289,414191745	57,309740940
4,52	5,086080000	296,716129008	58,338863920
4,54	5,122320000	304,181972167	59,383633230
4,56	5,158720000	311,814887822	60,444235745
4,58	5,195280000	319,618093030	61,520859902
4,60	5,232000000	327,594855922	62,613695704
4,62	5,268880000	335,748496335	63,722934729
4,64	5,305920000	344,082386438	64,848770136
4,66	5,343120000	352,599951374	65,991396670
4,68	5,380480000	361,304669899	67,151010672
4,70	5,418000000	370,200075032	68,327810084
4,72	5,455680000	379,289754709	69,521994455
4,74	5,493520000	388,577352438	70,733764952
4,76	5,531520000	398,066567967	71,963324361

Continua na página posterior

Tabela B.1 – *Tabela para escoamento Isoentrópico. $k = 1,4$*

M	$\frac{T_o}{T}$	$\frac{P_o}{P}$	$\frac{\rho_o}{\rho}$
4,78	5,569680000	407,761157950	73,210877097
4,80	5,608000000	417,664936626	74,476629213
4,82	5,646480000	427,781776495	75,760788402
4,84	5,685120000	438,115609009	77,063564007
4,86	5,723920000	448,670425257	78,385167028
4,88	5,762880000	459,450276670	79,725810128
4,90	5,802000000	470,459275716	81,085707638
4,92	5,841280000	481,701596615	82,465075568
4,94	5,880720000	493,181476046	83,864131611
4,96	5,920320000	504,903213874	85,283095149
4,98	5,960080000	516,871173869	86,722187264
5,00	6,000000000	529,089784441	88,181630740

Tabela B.2 – Tabela para Choque Normal. $k = 1, 4$

M_1	M_2	$\frac{\rho_2}{\rho_1}$	$\frac{P_2}{P_1}$	$\frac{T_2}{T_1}$	ds	$\frac{P_{o2}}{P_{o1}}$	$\frac{P_{o2}}{P_1}$
1,00	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	0,000000	1,000000	1,892929
1,02	0,980519	1,033441	1,047133	1,013249	0,000003	0,999990	1,937897
1,04	0,962025	1,067088	1,095200	1,026345	0,000022	0,999923	1,984423
1,06	0,944445	1,100921	1,144200	1,039312	0,000072	0,999751	2,032453
1,08	0,927713	1,134925	1,194133	1,052170	0,000163	0,999431	2,081942
1,10	0,911770	1,169082	1,245000	1,064938	0,000308	0,998928	2,132847
1,12	0,896563	1,203377	1,296800	1,077634	0,000513	0,998213	2,185134
1,14	0,882042	1,237793	1,349533	1,090274	0,000787	0,997261	2,238769
1,16	0,868162	1,272315	1,403200	1,102872	0,001135	0,996052	2,293725
1,18	0,854884	1,306927	1,457800	1,115441	0,001563	0,994569	2,349977
1,20	0,842170	1,341615	1,513333	1,127994	0,002074	0,992798	2,407502
1,22	0,829986	1,376364	1,569800	1,140541	0,002673	0,990731	2,466280
1,24	0,818301	1,411160	1,627200	1,153094	0,003361	0,988359	2,526294
1,26	0,807085	1,445989	1,685533	1,165661	0,004140	0,985677	2,587527
1,28	0,796312	1,480839	1,744800	1,178251	0,005014	0,982682	2,649964
1,30	0,785957	1,515695	1,805000	1,190873	0,005982	0,979374	2,713594
1,32	0,775997	1,550546	1,866133	1,203533	0,007045	0,975752	2,778403
1,34	0,766412	1,585379	1,928200	1,216239	0,008204	0,971819	2,844381
1,36	0,757181	1,620182	1,991200	1,228998	0,009459	0,967579	2,911518
1,38	0,748286	1,654945	2,055133	1,241814	0,010810	0,963035	2,979806
1,40	0,739709	1,689655	2,120000	1,254694	0,012256	0,958194	3,049235
1,42	0,731436	1,724303	2,185800	1,267643	0,013797	0,953063	3,119800
1,44	0,723451	1,758878	2,252533	1,280665	0,015433	0,947648	3,191492
1,46	0,715740	1,793370	2,320200	1,293765	0,017161	0,941958	3,264305
1,48	0,708290	1,827770	2,388800	1,306948	0,018982	0,936001	3,338235
1,50	0,701089	1,862069	2,458333	1,320216	0,020894	0,929787	3,413275
1,52	0,694125	1,896257	2,528800	1,333574	0,022895	0,923324	3,489420
1,54	0,687388	1,930327	2,600200	1,347026	0,024986	0,916624	3,566667
1,56	0,680867	1,964270	2,672533	1,360573	0,027163	0,909697	3,645010
1,58	0,674553	1,998079	2,745800	1,374220	0,029426	0,902552	3,724446
1,60	0,668437	2,031746	2,820000	1,387969	0,031773	0,895200	3,804972
1,62	0,662511	2,065264	2,895133	1,401822	0,034203	0,887653	3,886584
1,64	0,656765	2,098627	2,971200	1,415783	0,036714	0,879921	3,969279
1,66	0,651194	2,131827	3,048200	1,429853	0,039305	0,872014	4,053053
1,68	0,645789	2,164860	3,126133	1,444035	0,041973	0,863944	4,137906
1,70	0,640544	2,197719	3,205000	1,458330	0,044718	0,855721	4,223833
1,72	0,635452	2,230398	3,284800	1,472742	0,047537	0,847356	4,310833
1,74	0,630508	2,262893	3,365533	1,487270	0,050429	0,838860	4,398903
1,76	0,625705	2,295199	3,447200	1,501918	0,053393	0,830242	4,488041
1,78	0,621037	2,327310	3,529800	1,516687	0,056426	0,821513	4,578246
1,80	0,616501	2,359223	3,613333	1,531578	0,059528	0,812684	4,669516
1,82	0,612091	2,390934	3,697800	1,546592	0,062695	0,803763	4,761848
1,84	0,607802	2,422438	3,783200	1,561732	0,065928	0,794761	4,855242
1,86	0,603629	2,453733	3,869533	1,576999	0,069224	0,785686	4,949696
1,88	0,599569	2,484814	3,956800	1,592393	0,072581	0,776549	5,045208
1,90	0,595616	2,515679	4,045000	1,607916	0,075999	0,767357	5,141777
1,92	0,591769	2,546325	4,134133	1,623568	0,079475	0,758119	5,239403
1,94	0,588022	2,576749	4,224200	1,639352	0,083007	0,748844	5,338083
1,96	0,584372	2,606949	4,315200	1,655268	0,086596	0,739540	5,437816
1,98	0,580816	2,636922	4,407133	1,671317	0,090238	0,730214	5,538603

Continua na página posterior

Tabela B.2 – *Tabela para Choque Normal. $k = 1, 4$*

M_1	M_2	$\frac{P_2}{P_1}$	$\frac{P_2}{P_1}$	$\frac{T_2}{T_1}$	ds	$\frac{P_{o2}}{P_{o1}}$	$\frac{P_{o2}}{P_1}$
2,00	0,577350	2,666667	4,500000	1,687500	0,093933	0,720874	5,640441
2,02	0,573972	2,696181	4,593800	1,703817	0,097678	0,711527	5,743330
2,04	0,570679	2,725463	4,688533	1,720271	0,101473	0,702180	5,847268
2,06	0,567467	2,754511	4,784200	1,736860	0,105317	0,692839	5,952256
2,08	0,564334	2,783325	4,880800	1,753586	0,109207	0,683512	6,058292
2,10	0,561277	2,811902	4,978333	1,770450	0,113142	0,674203	6,165375
2,12	0,558294	2,840243	5,076800	1,787453	0,117122	0,664919	6,273505
2,14	0,555383	2,868345	5,176200	1,804594	0,121144	0,655666	6,382681
2,16	0,552541	2,896209	5,276533	1,821876	0,125208	0,646447	6,492903
2,18	0,549766	2,923834	5,377800	1,839297	0,129312	0,637269	6,604169
2,20	0,547056	2,951220	5,480000	1,856860	0,133454	0,628136	6,716480
2,22	0,544409	2,978365	5,583133	1,874563	0,137635	0,619053	6,829835
2,24	0,541822	3,005271	5,687200	1,892409	0,141852	0,610023	6,944232
2,26	0,539295	3,031936	5,792200	1,910396	0,146105	0,601051	7,059673
2,28	0,536825	3,058362	5,898133	1,928527	0,150391	0,592140	7,176155
2,30	0,534411	3,084548	6,005000	1,946801	0,154711	0,583295	7,293680
2,32	0,532051	3,110495	6,112800	1,965218	0,159063	0,574517	7,412245
2,34	0,529743	3,136202	6,221533	1,983779	0,163446	0,565810	7,531852
2,36	0,527486	3,161671	6,331200	2,002485	0,167858	0,557177	7,652499
2,38	0,525278	3,186902	6,441800	2,021336	0,172300	0,548621	7,774187
2,40	0,523118	3,211896	6,553333	2,040332	0,176769	0,540144	7,896914
2,42	0,521004	3,236653	6,665800	2,059473	0,181265	0,531748	8,020681
2,44	0,518936	3,261174	6,779200	2,078760	0,185787	0,523435	8,145487
2,46	0,516911	3,285461	6,893533	2,098194	0,190334	0,515208	8,271331
2,48	0,514929	3,309514	7,008800	2,117773	0,194905	0,507067	8,398214
2,50	0,512989	3,333333	7,125000	2,137500	0,199499	0,499015	8,526136
2,52	0,511089	3,356921	7,242133	2,157374	0,204116	0,491052	8,655095
2,54	0,509228	3,380279	7,360200	2,177394	0,208754	0,483181	8,785092
2,56	0,507406	3,403407	7,479200	2,197563	0,213412	0,475402	8,916127
2,58	0,505620	3,426307	7,599133	2,217879	0,218090	0,467715	9,048199
2,60	0,503871	3,448980	7,720000	2,238343	0,222787	0,460123	9,181308
2,62	0,502157	3,471427	7,841800	2,258956	0,227502	0,452625	9,315453
2,64	0,500477	3,493651	7,964533	2,279717	0,232235	0,445223	9,450636
2,66	0,498830	3,515651	8,088200	2,300626	0,236984	0,437916	9,586854
2,68	0,497216	3,537431	8,212800	2,321685	0,241749	0,430705	9,724109
2,70	0,495634	3,558991	8,338333	2,342892	0,246530	0,423590	9,862399
2,72	0,494082	3,580333	8,464800	2,364249	0,251325	0,416572	10,001726
2,74	0,492560	3,601458	8,592200	2,385756	0,256133	0,409650	10,142088
2,76	0,491068	3,622369	8,720533	2,407412	0,260955	0,402825	10,283485
2,78	0,489604	3,643066	8,849800	2,429218	0,265790	0,396096	10,425918
2,80	0,488167	3,663551	8,980000	2,451173	0,270636	0,389464	10,569386
2,82	0,486758	3,683827	9,111133	2,473279	0,275494	0,382927	10,713888
2,84	0,485376	3,703894	9,243200	2,495536	0,280363	0,376486	10,859426
2,86	0,484019	3,723755	9,376200	2,517942	0,285241	0,370141	11,005998
2,88	0,482687	3,743411	9,510133	2,540500	0,290130	0,363890	11,153605
2,90	0,481380	3,762864	9,645000	2,563207	0,295027	0,357733	11,302246
2,92	0,480096	3,782115	9,780800	2,586066	0,299933	0,351670	11,451922
2,94	0,478836	3,801167	9,917533	2,609076	0,304846	0,345701	11,602632
2,96	0,477599	3,820021	10,055200	2,632237	0,309767	0,339823	11,754375
2,98	0,476384	3,838679	10,193800	2,655549	0,314696	0,334038	11,907153
3,00	0,475191	3,857143	10,333333	2,679012	0,319630	0,328344	12,060965

Continua na página posterior

Tabela B.2 – *Tabela para Choque Normal. $k = 1, 4$*

M_1	M_2	$\frac{\rho_2}{\rho_1}$	$\frac{P_2}{P_1}$	$\frac{T_2}{T_1}$	ds	$\frac{P_{o2}}{P_{o1}}$	$\frac{P_{o2}}{P_1}$
3,02	0,474019	3,875414	10,473800	2,702627	0,324571	0,322740	12,215810
3,04	0,472868	3,893495	10,615200	2,726394	0,329517	0,317226	12,371689
3,06	0,471737	3,911387	10,757533	2,750312	0,334468	0,311800	12,528601
3,08	0,470625	3,929092	10,900800	2,774381	0,339424	0,306462	12,686547
3,10	0,469534	3,946612	11,045000	2,798603	0,344384	0,301211	12,845527
3,12	0,468460	3,963948	11,190133	2,822977	0,349348	0,296046	13,005539
3,14	0,467406	3,981103	11,336200	2,847502	0,354315	0,290967	13,166585
3,16	0,466369	3,998078	11,483200	2,872180	0,359285	0,285971	13,328664
3,18	0,465350	4,014875	11,631133	2,897010	0,364258	0,281059	13,491776
3,20	0,464349	4,031496	11,780000	2,921992	0,369233	0,276229	13,655921
3,22	0,463364	4,047943	11,929800	2,947127	0,374210	0,271480	13,821098
3,24	0,462395	4,064216	12,080533	2,972414	0,379189	0,266811	13,987309
3,26	0,461443	4,080319	12,232200	2,997854	0,384168	0,262221	14,154552
3,28	0,460507	4,096253	12,384800	3,023446	0,389149	0,257710	14,322828
3,30	0,459586	4,112020	12,538333	3,049191	0,394130	0,253276	14,492136
3,32	0,458680	4,127621	12,692800	3,075088	0,399112	0,248918	14,662477
3,34	0,457788	4,143059	12,848200	3,101139	0,404093	0,244635	14,833851
3,36	0,456912	4,158334	13,004533	3,127342	0,409074	0,240426	15,006257
3,38	0,456049	4,173449	13,161800	3,153698	0,414054	0,236290	15,179695
3,40	0,455200	4,188406	13,320000	3,180208	0,419033	0,232226	15,354166
3,42	0,454365	4,203205	13,479133	3,206870	0,424011	0,228232	15,529668
3,44	0,453543	4,217850	13,639200	3,233685	0,428988	0,224309	15,706203
3,46	0,452734	4,232341	13,800200	3,260654	0,433962	0,220454	15,883770
3,48	0,451938	4,246680	13,962133	3,287776	0,438935	0,216668	16,062370
3,50	0,451154	4,260870	14,125000	3,315051	0,443906	0,212948	16,242001
3,52	0,450382	4,274910	14,288800	3,342479	0,448873	0,209293	16,422664
3,54	0,449623	4,288804	14,453533	3,370061	0,453839	0,205704	16,604359
3,56	0,448875	4,302553	14,619200	3,397797	0,458801	0,202177	16,787086
3,58	0,448138	4,316158	14,785800	3,425685	0,463760	0,198714	16,970845
3,60	0,447413	4,329621	14,953333	3,453728	0,468716	0,195312	17,155636
3,62	0,446699	4,342944	15,121800	3,481924	0,473668	0,191971	17,341459
3,64	0,445995	4,356128	15,291200	3,510273	0,478616	0,188690	17,528313
3,66	0,445302	4,369175	15,461533	3,538776	0,483560	0,185467	17,716199
3,68	0,444620	4,382086	15,632800	3,567433	0,488500	0,182302	17,905117
3,70	0,443948	4,394864	15,805000	3,596244	0,493436	0,179194	18,095066
3,72	0,443285	4,407508	15,978133	3,625208	0,498367	0,176141	18,286047
3,74	0,442633	4,420021	16,152200	3,654326	0,503293	0,173143	18,478060
3,76	0,441990	4,432405	16,327200	3,683598	0,508215	0,170200	18,671104
3,78	0,441356	4,444661	16,503133	3,713024	0,513131	0,167309	18,865179
3,80	0,440732	4,456790	16,680000	3,742604	0,518042	0,164470	19,060286
3,82	0,440117	4,468794	16,857800	3,772338	0,522948	0,161683	19,256425
3,84	0,439510	4,480674	17,036533	3,802225	0,527848	0,158946	19,453595
3,86	0,438912	4,492432	17,216200	3,832267	0,532743	0,156258	19,651796
3,88	0,438323	4,504069	17,396800	3,862463	0,537632	0,153619	19,851029
3,90	0,437742	4,515586	17,578333	3,892813	0,542515	0,151027	20,051292
3,92	0,437170	4,526986	17,760800	3,923317	0,547391	0,148483	20,252588
3,94	0,436605	4,538268	17,944200	3,953975	0,552262	0,145984	20,454914
3,96	0,436049	4,549435	18,128533	3,984788	0,557126	0,143531	20,658272
3,98	0,435500	4,560488	18,313800	4,015754	0,561984	0,141122	20,862661
4,00	0,434959	4,571429	18,500000	4,046875	0,566836	0,138756	21,068081
4,02	0,434425	4,582257	18,687133	4,078150	0,571680	0,136434	21,274532

Continua na página posterior

Tabela B.2 – Tabela para Choque Normal. $k = 1, 4$

M_1	M_2	$\frac{\rho_2}{\rho_1}$	$\frac{P_2}{P_1}$	$\frac{T_2}{T_1}$	ds	$\frac{P_{o2}}{P_{o1}}$	$\frac{P_{o2}}{P_1}$
4,04	0,433899	4,592976	18,875200	4,109579	0,576518	0,134153	21,482015
4,06	0,433380	4,603586	19,064200	4,141163	0,581349	0,131914	21,690528
4,08	0,432868	4,614088	19,254133	4,172901	0,586173	0,129715	21,900073
4,10	0,432363	4,624484	19,445000	4,204793	0,590990	0,127556	22,110649
4,12	0,431865	4,634775	19,636800	4,236840	0,595800	0,125436	22,322256
4,14	0,431373	4,644962	19,829533	4,269041	0,600602	0,123355	22,534894
4,16	0,430888	4,655046	20,023200	4,301397	0,605397	0,121311	22,748563
4,18	0,430410	4,665029	20,217800	4,333907	0,610185	0,119304	22,963263
4,20	0,429938	4,674912	20,413333	4,366571	0,614965	0,117334	23,178994
4,22	0,429472	4,684695	20,609800	4,399390	0,619737	0,115399	23,395756
4,24	0,429012	4,694381	20,807200	4,432363	0,624502	0,113498	23,613548
4,26	0,428559	4,703969	21,005533	4,465491	0,629259	0,111633	23,832372
4,28	0,428111	4,713462	21,204800	4,498774	0,634009	0,109801	24,052227
4,30	0,427669	4,722861	21,405000	4,532211	0,638750	0,108002	24,273113
4,32	0,427233	4,732166	21,606133	4,565802	0,643483	0,106235	24,495029
4,34	0,426803	4,741378	21,808200	4,599548	0,648209	0,104500	24,717976
4,36	0,426378	4,750500	22,011200	4,633449	0,652926	0,102796	24,941955
4,38	0,425959	4,759531	22,215133	4,667505	0,657635	0,101124	25,166964
4,40	0,425545	4,768473	22,420000	4,701715	0,662336	0,099481	25,393004
4,42	0,425136	4,777327	22,625800	4,736080	0,667029	0,097867	25,620074
4,44	0,424732	4,786093	22,832533	4,770599	0,671714	0,096283	25,848176
4,46	0,424334	4,794774	23,040200	4,805273	0,676390	0,094727	26,077308
4,48	0,423940	4,803370	23,248800	4,840102	0,681057	0,093199	26,307471
4,50	0,423552	4,811881	23,458333	4,875086	0,685717	0,091698	26,538665
4,52	0,423168	4,820310	23,668800	4,910224	0,690367	0,090224	26,770890
4,54	0,422789	4,828656	23,880200	4,945517	0,695009	0,088776	27,004145
4,56	0,422415	4,836921	24,092533	4,980965	0,699643	0,087354	27,238431
4,58	0,422045	4,845106	24,305800	5,016568	0,704268	0,085958	27,473748
4,60	0,421680	4,853211	24,520000	5,052325	0,708885	0,084586	27,710095
4,62	0,421319	4,861238	24,735133	5,088237	0,713492	0,083239	27,947473
4,64	0,420963	4,869188	24,951200	5,124304	0,718091	0,081916	28,185882
4,66	0,420611	4,877061	25,168200	5,160526	0,722681	0,080616	28,425322
4,68	0,420263	4,884858	25,386133	5,196903	0,727263	0,079340	28,665792
4,70	0,419920	4,892580	25,605000	5,233435	0,731836	0,078086	28,907292
4,72	0,419581	4,900229	25,824800	5,270121	0,736399	0,076854	29,149824
4,74	0,419245	4,907804	26,045533	5,306963	0,740954	0,075644	29,393386
4,76	0,418914	4,915307	26,267200	5,343959	0,745500	0,074455	29,637978
4,78	0,418586	4,922739	26,489800	5,381110	0,750038	0,073287	29,883602
4,80	0,418263	4,930100	26,713333	5,418416	0,754566	0,072140	30,130255
4,82	0,417943	4,937391	26,937800	5,455877	0,759085	0,071013	30,377940
4,84	0,417627	4,944613	27,163200	5,493493	0,763596	0,069905	30,626655
4,86	0,417315	4,951767	27,389533	5,531264	0,768097	0,068818	30,876400
4,88	0,417006	4,958854	27,616800	5,569190	0,772589	0,067749	31,127176
4,90	0,416701	4,965874	27,845000	5,607271	0,777073	0,066699	31,378983
4,92	0,416400	4,972828	28,074133	5,645507	0,781547	0,065667	31,631820
4,94	0,416101	4,979717	28,304200	5,683898	0,786013	0,064653	31,885688
4,96	0,415807	4,986541	28,535200	5,722443	0,790469	0,063657	32,140586
4,98	0,415515	4,993302	28,767133	5,761144	0,794916	0,062678	32,396515
5,00	0,415227	5,000000	29,000000	5,800000	0,799354	0,061716	32,653474

Tabela B.3 – Tabela para Escoamento unidimensional com troca de calor. $k = 1,4$

M	$\frac{T}{T^*}$	$\frac{P}{P^*}$	$\frac{\rho}{\rho^*}$	$\frac{P_o}{P_o^*}$	$\frac{T_o}{T_o^*}$
0,02	0,00230142	2,39865675	1042,25000000	1,26752152	0,00191800
0,04	0,00917485	2,39463602	261,00000000	1,26646001	0,00764816
0,06	0,02052855	2,38796466	116,32407407	1,26470013	0,01711944
0,08	0,03621217	2,37868696	65,68750000	1,26225566	0,03021544
0,1	0,05602045	2,36686391	42,25000000	1,25914560	0,04677707
0,12	0,07969818	2,35257215	29,51851852	1,25539382	0,06660642
0,14	0,10694626	2,33590283	21,84183673	1,25102873	0,08947124
0,16	0,13742859	2,31696015	16,85937500	1,24608281	0,11511019
0,18	0,17077950	2,29585980	13,44341564	1,24059214	0,14323846
0,2	0,20661157	2,27272727	11,00000000	1,23459588	0,17355372
0,22	0,24452347	2,24769611	9,19214876	1,22813574	0,20574205
0,24	0,28410762	2,22090613	7,81712963	1,22125541	0,23948379
0,26	0,32495749	2,19250164	6,74704142	1,21400003	0,27445910
0,28	0,36667425	2,16262976	5,89795918	1,20641566	0,31035308
0,3	0,40887279	2,13143872	5,21296296	1,19854878	0,34686042
0,32	0,45118687	2,09907641	4,65234375	1,19044580	0,38368931
0,34	0,49327337	2,06568891	4,18771626	1,18215267	0,42056487
0,36	0,53481569	2,03141928	3,79835391	1,17371444	0,45723176
0,38	0,57552624	1,99640647	3,46883657	1,16517497	0,49345620
0,4	0,61514802	1,96078431	3,18750000	1,15657661	0,52902730
0,42	0,65345550	1,92468082	2,94538927	1,14795997	0,56375784
0,44	0,69025474	1,88821752	2,73553719	1,13936373	0,59748451
0,46	0,72538289	1,85150898	2,55245747	1,13082450	0,63006758
0,48	0,75870717	1,81466247	2,39178241	1,12237670	0,66139033
0,5	0,79012346	1,77777778	2,25000000	1,11405250	0,69135802
0,52	0,81955447	1,74094708	2,12426036	1,10588181	0,71989665
0,54	0,84694781	1,70425496	2,01223137	1,09789224	0,74695151
0,56	0,87227376	1,66777852	1,91198980	1,09010920	0,77248564
0,58	0,89552300	1,63158753	1,82193817	1,08255586	0,79647816
0,6	0,91670439	1,59574468	1,74074074	1,07525332	0,81892259
0,62	0,93584265	1,56030582	1,66727367	1,06822062	0,83982520
0,64	0,95297621	1,52532032	1,60058594	1,06147487	0,85920335
0,66	0,96815507	1,49083139	1,53986838	1,05503135	0,87708395
0,68	0,98143892	1,45687646	1,48442907	1,04890365	0,89350199
0,7	0,99289523	1,42348754	1,43367347	1,04310374	0,90849913
0,72	1,00259764	1,39069164	1,38708848	1,03764211	0,92212247
0,74	1,01062446	1,35851107	1,34422936	1,03252790	0,93442337
0,76	1,01705726	1,32696391	1,30470914	1,02776900	0,94545643
0,78	1,02197975	1,29606428	1,26818979	1,02337216	0,95527854
0,8	1,02547669	1,26582278	1,23437500	1,01934312	0,96394809
0,82	1,02763298	1,23624675	1,20300416	1,01568668	0,97152422
0,84	1,02853294	1,20734063	1,17384732	1,01240683	0,97806626
0,86	1,02825961	1,17910624	1,14670092	1,00950681	0,98363314
0,88	1,02689423	1,15154307	1,12138430	1,00698925	0,98828301
0,9	1,02451583	1,12464855	1,09773663	1,00485619	0,99207283
0,92	1,02120082	1,09841828	1,07561437	1,00310920	0,99505808
0,94	1,01702280	1,07284626	1,05488909	1,00174943	0,99729256
0,96	1,01205231	1,04792511	1,03544560	1,00077767	0,99882816
0,98	1,00635668	1,02364623	1,01718034	1,00019444	0,99971472
1	1,00000000	1,00000000	1,00000000	1,00000000	1,00000000

Continua na página posterior

Tabela B.3 – Tabela para Escoamento unidimensional com troca de calor. $k = 1,4$

M	$\frac{T}{T^*}$	$\frac{P}{P^*}$	$\frac{\rho}{\rho^*}$	$\frac{P_o}{P_o^*}$	$\frac{T_o}{T_o^*}$
1,02	0,99304305	0,97697593	0,98382033	1,00019444	0,99972954
1,04	0,98554328	0,95456281	0,96856509	1,00077769	0,99894666
1,06	0,97755486	0,93274881	0,95416518	1,00174960	0,99769249
1,08	0,96912874	0,91152163	0,94055784	1,00310993	0,99600591
1,1	0,96031270	0,89086860	0,92768595	1,00485842	0,99392364
1,12	0,95115146	0,87077673	0,91549745	1,00699479	0,99148028
1,14	0,94168678	0,85123287	0,90394480	1,00951882	0,98870834
1,16	0,93195757	0,83222370	0,89298454	1,01243029	0,98563832
1,18	0,92200001	0,81373586	0,88257685	1,01572906	0,98229881
1,2	0,91184769	0,79575597	0,87268519	1,01941510	0,97871652
1,22	0,90153170	0,77827068	0,86327600	1,02348846	0,97491638
1,24	0,89108081	0,76126675	0,85431842	1,02794929	0,97092165
1,26	0,88052155	0,74473103	0,84578399	1,03279790	0,96675396
1,28	0,86987835	0,72865054	0,83764648	1,03803471	0,96243340
1,3	0,85917368	0,71301248	0,82988166	1,04366031	0,95797865
1,32	0,84842816	0,69780424	0,82246710	1,04967542	0,95340700
1,34	0,83766065	0,68301346	0,81538204	1,05608095	0,94873445
1,36	0,82688841	0,66862798	0,80860727	1,06287797	0,94397581
1,38	0,81612715	0,65463591	0,80212490	1,07006770	0,93914472
1,4	0,80539119	0,64102564	0,79591837	1,07765156	0,93425378
1,42	0,79469351	0,62778580	0,78997223	1,08563116	0,92931459
1,44	0,78404586	0,61490530	0,78427212	1,09400827	0,92433779
1,46	0,77345885	0,60237335	0,77880465	1,10278485	0,91933319
1,48	0,76294204	0,59017941	0,77355734	1,11196306	0,91430974
1,5	0,75250399	0,57831325	0,76851852	1,12154523	0,90927566
1,52	0,74215237	0,56676491	0,76367729	1,13153389	0,90423845
1,54	0,73189398	0,55552469	0,75902344	1,14193177	0,89920495
1,56	0,72173488	0,54458321	0,75454745	1,15274177	0,89418140
1,58	0,71168038	0,53393134	0,75024035	1,16396700	0,88917347
1,6	0,70173515	0,52356021	0,74609375	1,17561073	0,88418629
1,62	0,69190324	0,51346124	0,74209978	1,18767645	0,87922451
1,64	0,68218814	0,50362611	0,73825104	1,20016783	0,87429233
1,66	0,67259285	0,49404674	0,73454057	1,21308872	0,86939352
1,68	0,66311987	0,48471531	0,73096183	1,22644318	0,86453147
1,7	0,65377127	0,47562426	0,72750865	1,24023542	0,85970922
1,72	0,64454876	0,46676624	0,72417523	1,25446987	0,85492947
1,74	0,63545364	0,45813417	0,72095609	1,26915114	0,85019460
1,76	0,62648692	0,44972117	0,71784607	1,28428402	0,84550674
1,78	0,61764928	0,44152060	0,71484030	1,29987347	0,84086773
1,8	0,60894116	0,43352601	0,71193416	1,31592466	0,83627919
1,82	0,60036273	0,42573119	0,70912329	1,33244292	0,83174252
1,84	0,59191392	0,41813012	0,70640359	1,34943378	0,82725890
1,86	0,58359450	0,41071697	0,70377115	1,36690294	0,82282935
1,88	0,57540403	0,40348612	0,70122227	1,38485627	0,81845469
1,9	0,56734189	0,39643211	0,69875346	1,40329985	0,81413561
1,92	0,55940734	0,38954968	0,69636140	1,42223991	0,80987266
1,94	0,55159950	0,38283374	0,69404294	1,44168287	0,80566623
1,96	0,54391735	0,37627935	0,69179509	1,46163532	0,80151661
1,98	0,53635979	0,36988176	0,68961501	1,48210404	0,79742398
2	0,52892562	0,36363636	0,68750000	1,50309598	0,79338843
2,02	0,52161355	0,35753870	0,68544751	1,52461825	0,78940994

Continua na página posterior

Tabela B.3 – *Tabela para Escoamento unidimensional com troca de calor. $k = 1, 4$*

M	$\frac{T}{T_*}$	$\frac{P}{P_*}$	$\frac{\rho}{\rho_*}$	$\frac{P_o}{P_{o*}}$	$\frac{T_o}{T_{o*}}$
2,04	0,51442221	0,35158447	0,68345508	1,54667816	0,78548842
2,06	0,50735019	0,34576951	0,68152041	1,56928319	0,78162371
2,08	0,50039601	0,34008978	0,67964127	1,59244097	0,77781556
2,1	0,49355815	0,33454140	0,67781557	1,61615933	0,77406370
2,12	0,48683504	0,32912059	0,67604130	1,64044628	0,77036776
2,14	0,48022508	0,32382371	0,67431653	1,66530997	0,76672736
2,16	0,47372665	0,31864724	0,67263946	1,69075875	0,76314205
2,18	0,46733810	0,31358776	0,67100833	1,71680114	0,75961134
2,2	0,46105777	0,30864198	0,66942149	1,74344583	0,75613474
2,22	0,45488398	0,30380670	0,66787734	1,77070168	0,75271168
2,24	0,44881504	0,29907884	0,66637436	1,79857772	0,74934159
2,26	0,44284928	0,29445540	0,66491111	1,82708317	0,74602389
2,28	0,43698499	0,28993351	0,66348620	1,85622741	0,74275795
2,3	0,43122049	0,28551035	0,66209830	1,88601999	0,73954313
2,32	0,42555409	0,28118322	0,66074614	1,91647064	0,73637879
2,34	0,41998412	0,27694949	0,65942849	1,94758927	0,73326427
2,36	0,41450890	0,27280663	0,65814421	1,97938595	0,73019888
2,38	0,40912679	0,26875218	0,65689217	2,01187094	0,72718195
2,4	0,40383613	0,26478376	0,65567130	2,04505465	0,72421280
2,42	0,39863530	0,26089906	0,65448057	2,07894769	0,72129071
2,44	0,39352268	0,25709585	0,65331900	2,11356084	0,71841501
2,46	0,38849668	0,25337196	0,65218565	2,14890504	0,71558498
2,48	0,38355571	0,24972530	0,65107960	2,18499142	0,71279994
2,5	0,37869822	0,24615385	0,65000000	2,22183129	0,71005917
2,52	0,37392267	0,24265562	0,64894600	2,25943612	0,70736199
2,54	0,36922754	0,23922873	0,64791680	2,29781757	0,70470769
2,56	0,36461133	0,23587131	0,64691162	2,33698749	0,70209558
2,58	0,36007257	0,23258158	0,64592973	2,37695787	0,69952498
2,6	0,35560980	0,22935780	0,64497041	2,41774092	0,69699520
2,62	0,35122159	0,22619829	0,64403298	2,45934900	0,69450556
2,64	0,34690653	0,22310141	0,64311677	2,50179467	0,69205540
2,66	0,34266324	0,22006558	0,64222115	2,54509067	0,68964403
2,68	0,33849035	0,21708927	0,64134551	2,58924991	0,68727081
2,7	0,33438653	0,21417098	0,64048925	2,63428548	0,68493508
2,72	0,33035046	0,21130927	0,63965182	2,68021066	0,68263619
2,74	0,32638085	0,20850274	0,63883265	2,72703893	0,68037352
2,76	0,32247642	0,20575003	0,63803123	2,77478392	0,67814642
2,78	0,31863594	0,20304981	0,63724704	2,82345948	0,67595428
2,8	0,31485817	0,20040080	0,63647959	2,87307962	0,67379649
2,82	0,31114192	0,19780176	0,63572842	2,92365854	0,67167244
2,84	0,30748601	0,19525148	0,63499306	2,97521066	0,66958154
2,86	0,30388929	0,19274879	0,63427307	3,02775053	0,66752321
2,88	0,30035061	0,19029254	0,63356803	3,08129294	0,66549685
2,9	0,29686887	0,18788163	0,63287753	3,13585286	0,66350192
2,92	0,29344297	0,18551499	0,63220116	3,19144542	0,66153784
2,94	0,29007186	0,18319156	0,63153856	3,24808598	0,65960407
2,96	0,28675448	0,18091034	0,63088934	3,30579008	0,65770007
2,98	0,28348980	0,17867034	0,63025314	3,36457344	0,65582530
3	0,28027682	0,17647059	0,62962963	3,42445199	0,65397924
3,02	0,27711455	0,17431017	0,62901846	3,48544186	0,65216138
3,04	0,27400203	0,17218817	0,62841932	3,54755935	0,65037121

Continua na página posterior

Tabela B.3 – Tabela para Escoamento unidimensional com troca de calor. $k = 1, 4$

M	$\frac{T}{T^*}$	$\frac{P}{P^*}$	$\frac{\rho}{\rho^*}$	$\frac{P_o}{P_o^*}$	$\frac{T_o}{T_o^*}$
3,06	0,27093830	0,17010371	0,62783189	3,61082099	0,64860824
3,08	0,26792245	0,16805593	0,62725586	3,67524349	0,64687197
3,1	0,26495357	0,16604400	0,62669095	3,74084377	0,64516194
3,12	0,26203075	0,16406711	0,62613686	3,80763893	0,64347766
3,14	0,25915315	0,16212448	0,62559333	3,87564629	0,64181868
3,16	0,25631988	0,16021533	0,62506009	3,94488336	0,64018454
3,18	0,25353014	0,15833892	0,62453687	4,01536788	0,63857481
3,2	0,25078308	0,15649452	0,62402344	4,08711775	0,63698904
3,22	0,24807792	0,15468143	0,62351954	4,16015112	0,63542680
3,24	0,24541387	0,15289896	0,62302495	4,23448631	0,63388767
3,26	0,24279016	0,15114645	0,62253943	4,31014188	0,63237125
3,28	0,24020603	0,14942323	0,62206276	4,38713656	0,63087712
3,3	0,23766075	0,14772867	0,62159474	4,46548934	0,62940489
3,32	0,23515360	0,14606216	0,62113514	4,54521937	0,62795417
3,34	0,23268387	0,14442310	0,62068378	4,62634604	0,62652458
3,36	0,23025086	0,14281090	0,62024046	4,70888894	0,62511574
3,38	0,22785391	0,14122499	0,61980498	4,79286790	0,62372728
3,4	0,22549234	0,13966480	0,61937716	4,87830292	0,62235885
3,42	0,22316551	0,13812981	0,61895683	4,96521426	0,62101009
3,44	0,22087278	0,13661949	0,61854381	5,05362237	0,61968066
3,46	0,21861352	0,13513331	0,61813793	5,14354793	0,61837021
3,48	0,21638714	0,13367078	0,61773902	5,23501183	0,61707841
3,5	0,21419302	0,13223140	0,61734694	5,32803518	0,61580493
3,52	0,21203059	0,13081471	0,61696152	5,42263933	0,61454946
3,54	0,20989927	0,12942024	0,61658261	5,51884583	0,61331167
3,56	0,20779850	0,12804753	0,61621007	5,61667647	0,61209127
3,58	0,20572774	0,12669614	0,61584376	5,71615326	0,61088795
3,6	0,20368644	0,12536565	0,61548354	5,81729842	0,60970140
3,62	0,20167408	0,12405563	0,61512927	5,92013442	0,60853135
3,64	0,19969013	0,12276566	0,61478082	6,02468394	0,60737751
3,66	0,19773411	0,12149536	0,61443807	6,13096992	0,60623959
3,68	0,19580551	0,12024434	0,61410090	6,23901548	0,60511733
3,7	0,19390384	0,11901220	0,61376917	6,34884402	0,60401046
3,72	0,19202863	0,11779858	0,61344279	6,46047915	0,60291870
3,74	0,19017943	0,11660312	0,61312162	6,57394470	0,60184181
3,76	0,18835576	0,11542546	0,61280557	6,68926478	0,60077953
3,78	0,18655719	0,11426526	0,61249452	6,80646368	0,59973161
3,8	0,18478328	0,11312217	0,61218837	6,92556597	0,59869782
3,82	0,18303359	0,11199588	0,61188701	7,04659644	0,59767790
3,84	0,18130772	0,11088605	0,61159035	7,16958013	0,59667163
3,86	0,17960525	0,10979238	0,61129829	7,29454230	0,59567877
3,88	0,17792578	0,10871456	0,61101073	7,42150848	0,59469911
3,9	0,17626890	0,10765228	0,61072759	7,55050442	0,59373242
3,92	0,17463425	0,10660526	0,61044877	7,68155612	0,59277849
3,94	0,17302143	0,10557321	0,61017419	7,81468983	0,59183710
3,96	0,17143008	0,10455585	0,60990375	7,94993206	0,59090805
3,98	0,16985983	0,10355290	0,60963738	8,08730953	0,58999112
4	0,16831032	0,10256410	0,60937500	8,22684925	0,58908613
4,02	0,16678121	0,10158919	0,60911652	8,36857846	0,58819287
4,04	0,16527216	0,10062792	0,60886188	8,51252465	0,58731115
4,06	0,16378283	0,09968003	0,60861098	8,65871556	0,58644079

Continua na página posterior

Tabela B.3 – *Tabela para Escoamento unidimensional com troca de calor. $k = 1, 4$*

M	$\frac{T}{T^*}$	$\frac{P}{P^*}$	$\frac{\rho}{\rho^*}$	$\frac{P_o}{P_{o^*}}$	$\frac{T_o}{T_{o^*}}$
4,08	0,16231288	0,09874528	0,60836377	8,80717919	0,58558159
4,1	0,16086200	0,09782343	0,60812017	8,95794381	0,58473338
4,12	0,15942988	0,09691425	0,60788010	9,11103792	0,58389598
4,14	0,15801619	0,09601751	0,60764351	9,26649028	0,58306922
4,16	0,15662065	0,09513300	0,60741032	9,42432994	0,58225291
4,18	0,15524294	0,09426048	0,60718047	9,58458616	0,58144690
4,2	0,15388278	0,09339975	0,60695389	9,74728850	0,58065101
4,22	0,15253988	0,09255060	0,60673053	9,91246677	0,57986510
4,24	0,15121396	0,09171283	0,60651032	10,08015104	0,57908899
4,26	0,14990475	0,09088623	0,60629321	10,25037165	0,57832253
4,28	0,14861197	0,09007062	0,60607913	10,42315920	0,57756557
4,3	0,14733537	0,08926579	0,60586804	10,59854455	0,57681796
4,32	0,14607467	0,08847157	0,60565987	10,77655886	0,57607955
4,34	0,14482963	0,08768776	0,60545456	10,95723351	0,57535019
4,36	0,14360000	0,08691420	0,60525208	11,14060020	0,57462975
4,38	0,14238553	0,08615070	0,60505237	11,32669086	0,57391809
4,4	0,14118598	0,08539710	0,60485537	11,51553773	0,57321507
4,42	0,14000111	0,08465322	0,60466104	11,70717329	0,57252055
4,44	0,13883070	0,08391890	0,60446933	11,90163032	0,57183440
4,46	0,13767452	0,08319398	0,60428020	12,09894186	0,57115649
4,48	0,13653233	0,08247831	0,60409359	12,29914124	0,57048671
4,5	0,13540394	0,08177172	0,60390947	12,50226207	0,56982491
4,52	0,13428912	0,08107407	0,60372778	12,70833823	0,56917099
4,54	0,13318765	0,08038521	0,60354849	12,91740388	0,56852481
4,56	0,13209934	0,07970499	0,60337155	13,12949348	0,56788627
4,58	0,13102399	0,07903327	0,60319693	13,34464175	0,56725524
4,6	0,12996138	0,07836991	0,60302457	13,56288371	0,56663162
4,62	0,12891133	0,07771477	0,60285446	13,78425467	0,56601528
4,64	0,12787365	0,07706773	0,60268653	14,00879021	0,56540613
4,66	0,12684815	0,07642864	0,60252077	14,23652622	0,56480405
4,68	0,12583463	0,07579739	0,60235712	14,46749886	0,56420895
4,7	0,12483293	0,07517384	0,60219556	14,70174459	0,56362070
4,72	0,12384287	0,07455787	0,60203605	14,93930018	0,56303922
4,74	0,12286426	0,07394936	0,60187856	15,18020265	0,56246440
4,76	0,12189694	0,07334820	0,60172304	15,42448936	0,56189614
4,78	0,12094074	0,07275426	0,60156948	15,67219794	0,56133435
4,8	0,11999549	0,07216743	0,60141782	15,92336633	0,56077894
4,82	0,11906104	0,07158760	0,60126806	16,17803275	0,56022980
4,84	0,11813721	0,07101466	0,60112014	16,43623574	0,55968685
4,86	0,11722386	0,07044850	0,60097405	16,69801413	0,55915000
4,88	0,11632083	0,069888902	0,60082975	16,96340706	0,55861916
4,9	0,11542797	0,069333611	0,60068721	17,23245396	0,55809424
4,92	0,11454513	0,06878967	0,60054641	17,50519458	0,55757516
4,94	0,11367217	0,06824960	0,60040732	17,78166896	0,55706184
4,96	0,11280894	0,06771581	0,60026990	18,06191747	0,55655418
4,98	0,11195530	0,06718820	0,60013414	18,34598076	0,55605211
5	0,11111111	0,06666667	0,60000000	18,63389981	0,55555556

Tabela B.4 – Tabela para Escoamento unidimensional com atrito. $k = 1,4$

M	$\frac{T}{T^*}$	$\frac{P}{P^*}$	$\frac{\rho}{\rho^*}$	$\frac{P_o}{P_o^*}$	$\frac{4fL^*}{D}$
0,02	1,19990	54,77006	45,64537	28,94213	1778,44988
0,04	1,19962	27,38175	22,82542	14,48149	440,35221
0,06	1,19914	18,25085	15,21999	9,66591	193,03108
0,08	1,19847	13,68431	11,41819	7,26161	106,71822
0,1	1,19760	10,94351	9,13783	5,82183	66,92156
0,12	1,19655	9,11559	7,61820	4,86432	45,40796
0,14	1,19531	7,80932	6,53327	4,18240	32,51131
0,16	1,19389	6,82907	5,72003	3,67274	24,19783
0,18	1,19227	6,06618	5,08791	3,27793	18,54265
0,2	1,19048	5,45545	4,58258	2,96352	14,53327
0,22	1,18850	4,95537	4,16945	2,70760	11,59605
0,24	1,18633	4,53829	3,82548	2,49556	9,38648
0,26	1,18399	4,18505	3,53470	2,31729	7,68757
0,28	1,18147	3,88199	3,28571	2,16555	6,35721
0,3	1,17878	3,61906	3,07017	2,03507	5,29925
0,32	1,17592	3,38874	2,88179	1,92185	4,44674
0,34	1,17288	3,18529	2,71577	1,82288	3,75195
0,36	1,16968	3,00422	2,56841	1,73578	3,18012
0,38	1,16632	2,84200	2,43673	1,65870	2,70545
0,4	1,16279	2,69582	2,31840	1,59014	2,30849
0,42	1,15911	2,56338	2,21151	1,52890	1,97437
0,44	1,15527	2,44280	2,11449	1,47401	1,69152
0,46	1,15128	2,33256	2,02606	1,42463	1,45091
0,48	1,14714	2,23135	1,94514	1,38010	1,24534
0,5	1,14286	2,13809	1,87083	1,33984	1,06906
0,52	1,13843	2,05187	1,80237	1,30339	0,91742
0,54	1,13387	1,97192	1,73910	1,27032	0,78663
0,56	1,12918	1,89755	1,68047	1,24029	0,67357
0,58	1,12435	1,82820	1,62600	1,21301	0,57568
0,6	1,11940	1,76336	1,57527	1,18820	0,49082
0,62	1,11433	1,70261	1,52792	1,16565	0,41720
0,64	1,10914	1,64556	1,48363	1,14515	0,35330
0,66	1,10383	1,59187	1,44213	1,12654	0,29785
0,68	1,09842	1,54126	1,40316	1,10965	0,24978
0,7	1,09290	1,49345	1,36651	1,09437	0,20814
0,72	1,08727	1,44823	1,33198	1,08057	0,17215
0,74	1,08155	1,40537	1,29941	1,06814	0,14112
0,76	1,07573	1,36470	1,26863	1,05700	0,11447
0,78	1,06982	1,32605	1,23951	1,04705	0,09167
0,8	1,06383	1,28928	1,21192	1,03823	0,07229
0,82	1,05775	1,25423	1,18575	1,03046	0,05593
0,84	1,05160	1,22080	1,16090	1,02370	0,04226
0,86	1,04537	1,18888	1,13728	1,01787	0,03097
0,88	1,03907	1,15835	1,11480	1,01294	0,02179
0,9	1,03270	1,12913	1,09338	1,00886	0,01451
0,92	1,02627	1,10114	1,07295	1,00560	0,00891
0,94	1,01978	1,07430	1,05346	1,00311	0,00482
0,96	1,01324	1,04854	1,03484	1,00136	0,00206
0,98	1,00664	1,02379	1,01704	1,00034	0,00049
1	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,00000

Continua na página posterior

Tabela B.4 – Tabela para Escoamento unidimensional com atrito. $k = 1,4$

M	$\frac{T}{T^*}$	$\frac{P}{P^*}$	$\frac{\rho}{\rho^*}$	$\frac{P_o}{P_o^*}$	$\frac{4fL^*}{D}$
1,02	0,99331	0,97711	0,98369	1,00033	0,00046
1,04	0,98658	0,95507	0,96805	1,00131	0,00177
1,06	0,97982	0,93383	0,95306	1,00291	0,00384
1,08	0,97302	0,91335	0,93868	1,00512	0,00658
1,1	0,96618	0,89359	0,92486	1,00793	0,00994
1,12	0,95932	0,87451	0,91159	1,01131	0,01382
1,14	0,95244	0,85608	0,89883	1,01527	0,01819
1,16	0,94554	0,83826	0,88655	1,01978	0,02298
1,18	0,93861	0,82103	0,87473	1,02484	0,02814
1,2	0,93168	0,80436	0,86335	1,03044	0,03364
1,22	0,92473	0,78822	0,85238	1,03657	0,03943
1,24	0,91777	0,77258	0,84181	1,04323	0,04547
1,26	0,91080	0,75743	0,83161	1,05041	0,05174
1,28	0,90383	0,74274	0,82176	1,05810	0,05820
1,3	0,89686	0,72848	0,81226	1,06630	0,06483
1,32	0,88989	0,71465	0,80308	1,07502	0,07161
1,34	0,88292	0,70122	0,79421	1,08424	0,07850
1,36	0,87596	0,68818	0,78563	1,09396	0,08550
1,38	0,86901	0,67551	0,77734	1,10419	0,09259
1,4	0,86207	0,66320	0,76931	1,11493	0,09974
1,42	0,85514	0,65122	0,76154	1,12616	0,10694
1,44	0,84822	0,63958	0,75402	1,13790	0,11419
1,46	0,84133	0,62825	0,74673	1,15015	0,12146
1,48	0,83445	0,61722	0,73967	1,16290	0,12875
1,5	0,82759	0,60648	0,73283	1,17617	0,13605
1,52	0,82075	0,59602	0,72619	1,18994	0,14335
1,54	0,81393	0,58583	0,71975	1,20423	0,15063
1,56	0,80715	0,57591	0,71351	1,21904	0,15790
1,58	0,80038	0,56623	0,70745	1,23438	0,16514
1,6	0,79365	0,55679	0,70156	1,25024	0,17236
1,62	0,78695	0,54759	0,69584	1,26663	0,17954
1,64	0,78027	0,53862	0,69029	1,28355	0,18667
1,66	0,77363	0,52986	0,68489	1,30102	0,19377
1,68	0,76703	0,52131	0,67965	1,31904	0,20081
1,7	0,76046	0,51297	0,67455	1,33761	0,20780
1,72	0,75392	0,50482	0,66959	1,35674	0,21474
1,74	0,74742	0,49686	0,66476	1,37643	0,22162
1,76	0,74096	0,48909	0,66007	1,39670	0,22844
1,78	0,73454	0,48149	0,65550	1,41755	0,23519
1,8	0,72816	0,47407	0,65105	1,43898	0,24189
1,82	0,72181	0,46681	0,64672	1,46101	0,24851
1,84	0,71551	0,45972	0,64250	1,48365	0,25507
1,86	0,70925	0,45278	0,63839	1,50689	0,26156
1,88	0,70304	0,44600	0,63439	1,53076	0,26798
1,9	0,69686	0,43936	0,63048	1,55526	0,27433
1,92	0,69073	0,43287	0,62668	1,58039	0,28061
1,94	0,68465	0,42651	0,62297	1,60617	0,28681
1,96	0,67861	0,42029	0,61935	1,63261	0,29295
1,98	0,67262	0,41421	0,61582	1,65972	0,29901
2	0,66667	0,40825	0,61237	1,68750	0,30500
2,02	0,66076	0,40241	0,60901	1,71597	0,31091

Continua na página posterior

Tabela B.4 – Tabela para Escoamento unidimensional com atrito. $k = 1, 4$

M	$\frac{T}{T^*}$	$\frac{P}{P^*}$	$\frac{\rho}{\rho^*}$	$\frac{P_o}{P_o^*}$	$\frac{4fL^*}{D}$
2,04	0,65491	0,39670	0,60573	1,74514	0,31676
2,06	0,64910	0,39110	0,60253	1,77502	0,32253
2,08	0,64334	0,38562	0,59940	1,80561	0,32822
2,1	0,63762	0,38024	0,59635	1,83694	0,33385
2,12	0,63195	0,37498	0,59337	1,86902	0,33940
2,14	0,62633	0,36982	0,59045	1,90184	0,34489
2,16	0,62076	0,36476	0,58760	1,93544	0,35030
2,18	0,61523	0,35980	0,58482	1,96981	0,35564
2,2	0,60976	0,35494	0,58210	2,00497	0,36091
2,22	0,60433	0,35017	0,57944	2,04094	0,36611
2,24	0,59895	0,34550	0,57684	2,07773	0,37124
2,26	0,59361	0,34091	0,57430	2,11535	0,37631
2,28	0,58833	0,33641	0,57182	2,15381	0,38130
2,3	0,58309	0,33200	0,56938	2,19313	0,38623
2,32	0,57790	0,32767	0,56700	2,23332	0,39109
2,34	0,57276	0,32342	0,56467	2,27440	0,39589
2,36	0,56767	0,31925	0,56240	2,31638	0,40062
2,38	0,56262	0,31516	0,56016	2,35928	0,40529
2,4	0,55762	0,31114	0,55798	2,40310	0,40989
2,42	0,55267	0,30720	0,55584	2,44787	0,41443
2,44	0,54777	0,30332	0,55375	2,49360	0,41891
2,46	0,54291	0,29952	0,55170	2,54031	0,42332
2,48	0,53810	0,29579	0,54969	2,58801	0,42768
2,5	0,53333	0,29212	0,54772	2,63672	0,43198
2,52	0,52862	0,28852	0,54579	2,68645	0,43621
2,54	0,52394	0,28498	0,54391	2,73723	0,44039
2,56	0,51932	0,28150	0,54205	2,78906	0,44451
2,58	0,51474	0,27808	0,54024	2,84197	0,44858
2,6	0,51020	0,27473	0,53846	2,89598	0,45259
2,62	0,50571	0,27143	0,53672	2,95109	0,45654
2,64	0,50127	0,26818	0,53501	3,00733	0,46044
2,66	0,49687	0,26500	0,53333	3,06472	0,46429
2,68	0,49251	0,26186	0,53169	3,12327	0,46808
2,7	0,48820	0,25878	0,53007	3,18301	0,47182
2,72	0,48393	0,25575	0,52849	3,24395	0,47551
2,74	0,47971	0,25278	0,52694	3,30611	0,47915
2,76	0,47553	0,24985	0,52542	3,36952	0,48273
2,78	0,47139	0,24697	0,52392	3,43418	0,48627
2,8	0,46729	0,24414	0,52245	3,50012	0,48976
2,82	0,46323	0,24135	0,52102	3,56737	0,49321
2,84	0,45922	0,23861	0,51960	3,63593	0,49660
2,86	0,45525	0,23592	0,51821	3,70584	0,49995
2,88	0,45132	0,23326	0,51685	3,77711	0,50326
2,9	0,44743	0,23066	0,51551	3,84977	0,50652
2,92	0,44358	0,22809	0,51420	3,92383	0,50973
2,94	0,43977	0,22556	0,51291	3,99932	0,51290
2,96	0,43600	0,22307	0,51164	4,07625	0,51603
2,98	0,43226	0,22063	0,51040	4,15466	0,51912
3	0,42857	0,21822	0,50918	4,23457	0,52216
3,02	0,42492	0,21585	0,50797	4,31599	0,52516
3,04	0,42130	0,21351	0,50679	4,39895	0,52813

Continua na página posterior

Tabela B.4 – Tabela para Escoamento unidimensional com atrito. $k = 1, 4$

M	$\frac{T}{T^*}$	$\frac{P}{P^*}$	$\frac{\rho}{\rho^*}$	$\frac{P_o}{P_o^*}$	$\frac{4fL^*}{D}$
3,06	0,41772	0,21121	0,50563	4,48347	0,53105
3,08	0,41418	0,20895	0,50449	4,56959	0,53393
3,1	0,41068	0,20672	0,50337	4,65731	0,53678
3,12	0,40721	0,20453	0,50227	4,74667	0,53958
3,14	0,40378	0,20237	0,50119	4,83769	0,54235
3,16	0,40038	0,20024	0,50012	4,93039	0,54509
3,18	0,39702	0,19814	0,49907	5,02481	0,54778
3,2	0,39370	0,19608	0,49804	5,12096	0,55044
3,22	0,39041	0,19405	0,49703	5,21887	0,55307
3,24	0,38716	0,19204	0,49603	5,31857	0,55566
3,26	0,38394	0,19007	0,49505	5,42008	0,55822
3,28	0,38075	0,18812	0,49409	5,52343	0,56074
3,3	0,37760	0,18621	0,49314	5,62865	0,56323
3,32	0,37448	0,18432	0,49221	5,73576	0,56569
3,34	0,37139	0,18246	0,49129	5,84479	0,56812
3,36	0,36833	0,18063	0,49039	5,95577	0,57051
3,38	0,36531	0,17882	0,48950	6,06873	0,57287
3,4	0,36232	0,17704	0,48862	6,18370	0,57521
3,42	0,35936	0,17528	0,48776	6,30070	0,57751
3,44	0,35643	0,17355	0,48692	6,41976	0,57978
3,46	0,35353	0,17185	0,48608	6,54092	0,58203
3,48	0,35066	0,17016	0,48526	6,66419	0,58424
3,5	0,34783	0,16851	0,48445	6,78962	0,58643
3,52	0,34502	0,16687	0,48366	6,91723	0,58859
3,54	0,34224	0,16526	0,48287	7,04705	0,59072
3,56	0,33949	0,16367	0,48210	7,17912	0,59282
3,58	0,33677	0,16210	0,48134	7,31346	0,59490
3,6	0,33408	0,16055	0,48059	7,45011	0,59695
3,62	0,33141	0,15903	0,47985	7,58910	0,59898
3,64	0,32877	0,15752	0,47913	7,73045	0,60098
3,66	0,32616	0,15604	0,47841	7,87421	0,60296
3,68	0,32358	0,15458	0,47770	8,02040	0,60491
3,7	0,32103	0,15313	0,47701	8,16907	0,60684
3,72	0,31850	0,15171	0,47633	8,32023	0,60874
3,74	0,31600	0,15030	0,47565	8,47393	0,61062
3,76	0,31352	0,14892	0,47499	8,63020	0,61247
3,78	0,31107	0,14755	0,47433	8,78907	0,61431
3,8	0,30864	0,14620	0,47368	8,95059	0,61612
3,82	0,30624	0,14487	0,47305	9,11477	0,61791
3,84	0,30387	0,14355	0,47242	9,28167	0,61968
3,86	0,30151	0,14225	0,47180	9,45131	0,62142
3,88	0,29919	0,14097	0,47119	9,62373	0,62315
3,9	0,29688	0,13971	0,47059	9,79897	0,62485
3,92	0,29460	0,13846	0,47000	9,97707	0,62653
3,94	0,29235	0,13723	0,46941	10,15806	0,62819
3,96	0,29011	0,13602	0,46884	10,34197	0,62984
3,98	0,28790	0,13482	0,46827	10,52886	0,63146
4	0,28571	0,13363	0,46771	10,71875	0,63306
4,02	0,28355	0,13246	0,46715	10,91168	0,63465
4,04	0,28140	0,13131	0,46661	11,10770	0,63622
4,06	0,27928	0,13017	0,46607	11,30684	0,63776

Continua na página posterior

Tabela B.4 – *Tabela para Escoamento unidimensional com atrito. $k = 1, 4$*

M	$\frac{T}{T^*}$	$\frac{P}{P^*}$	$\frac{\rho}{\rho^*}$	$\frac{P_o}{P_o^*}$	$\frac{4fL^*}{D}$
4,08	0,27718	0,12904	0,46554	11,50915	0,63929
4,1	0,27510	0,12793	0,46502	11,71465	0,64080
4,12	0,27304	0,12683	0,46450	11,92340	0,64230
4,14	0,27101	0,12574	0,46399	12,13543	0,64377
4,16	0,26899	0,12467	0,46349	12,35079	0,64523
4,18	0,26699	0,12362	0,46299	12,56951	0,64668
4,2	0,26502	0,12257	0,46250	12,79164	0,64810
4,22	0,26306	0,12154	0,46202	13,01722	0,64951
4,24	0,26112	0,12052	0,46154	13,24629	0,65090
4,26	0,25921	0,11951	0,46107	13,47890	0,65228
4,28	0,25731	0,11852	0,46061	13,71509	0,65364
4,3	0,25543	0,11753	0,46015	13,95490	0,65499
4,32	0,25357	0,11656	0,45970	14,19838	0,65632
4,34	0,25172	0,11560	0,45925	14,44557	0,65763
4,36	0,24990	0,11466	0,45881	14,69652	0,65893
4,38	0,24809	0,11372	0,45837	14,95127	0,66022
4,4	0,24631	0,11279	0,45794	15,20987	0,66149
4,42	0,24453	0,11188	0,45752	15,47236	0,66275
4,44	0,24278	0,11097	0,45710	15,73879	0,66399
4,46	0,24105	0,11008	0,45668	16,00921	0,66522
4,48	0,23933	0,10920	0,45628	16,28366	0,66643
4,5	0,23762	0,10833	0,45587	16,56219	0,66763
4,52	0,23594	0,10746	0,45547	16,84486	0,66882
4,54	0,23427	0,10661	0,45508	17,13170	0,67000
4,56	0,23262	0,10577	0,45469	17,42277	0,67116
4,58	0,23098	0,10494	0,45431	17,71812	0,67231
4,6	0,22936	0,10411	0,45393	18,01779	0,67345
4,62	0,22775	0,10330	0,45355	18,32185	0,67457
4,64	0,22616	0,10249	0,45318	18,63032	0,67569
4,66	0,22459	0,10170	0,45282	18,94328	0,67679
4,68	0,22303	0,10091	0,45245	19,26076	0,67788
4,7	0,22148	0,10013	0,45210	19,58283	0,67895
4,72	0,21995	0,09936	0,45174	19,90953	0,68002
4,74	0,21844	0,09860	0,45139	20,24091	0,68107
4,76	0,21694	0,09785	0,45105	20,57703	0,68211
4,78	0,21545	0,09711	0,45071	20,91795	0,68315
4,8	0,21398	0,09637	0,45037	21,26371	0,68417
4,82	0,21252	0,09564	0,45004	21,61437	0,68518
4,84	0,21108	0,09492	0,44971	21,96999	0,68618
4,86	0,20965	0,09421	0,44939	22,33061	0,68717
4,88	0,20823	0,09351	0,44907	22,69631	0,68814
4,9	0,20683	0,09281	0,44875	23,06712	0,68911
4,92	0,20543	0,09212	0,44843	23,44311	0,69007
4,94	0,20406	0,09144	0,44812	23,82434	0,69102
4,96	0,20269	0,09077	0,44782	24,21086	0,69196
4,98	0,20134	0,09010	0,44751	24,60272	0,69288
5	0,20000	0,08944	0,44721	25,00000	0,69380

Referências