

ESCOAMENTO UNIDIMENSIONAL

Equações governantes

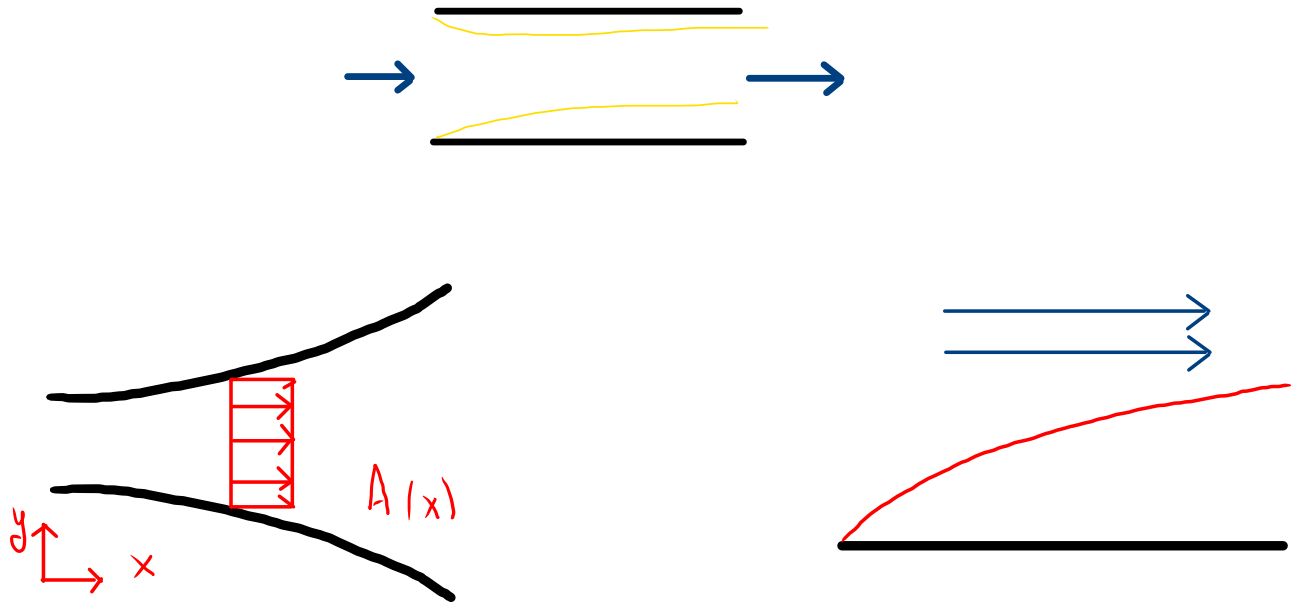
www.cienciastermicas.com

Conteúdo

- *Apresentação, motivação, objetivos do curso, introdução aos escoamentos compressíveis
- *Revisão de Termodinâmica: 1ª e 2ª Leis, trabalho, calor, calor específico
- *Gases ideais: definição, entropia, equações isentrópicas
- *Equações governantes na formulação integral: conservação de massa, 2ª Lei de Newton e Conservação de energia
- *Velocidade do som: definição, equação; velocidade do som em gases; cone de Mach
- *Escoamento unidimensional
- *Propriedades de estagnação; propriedades características; equações em função de Mach
- *Escoamento com variação de área
- *Choque normal: equações, estados de referência, propriedades antes e depois do choque
- *Escoamento com adição de calor (Rayleigh)
- *Escoamento com atrito (Fanno)
- *Choque Oblíquo
- *Escoamento supersônico

Escoamento unidimensional e quasi-unidimensional

variação das propriedades na direção perpendicular à linha de corrente é desprezível



ESCOAMENTOS ISOENTRÓPICO UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE

Teorema de Transporte de Reynolds

$$\frac{DB}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} b (\rho dV) + \int_{SC} b (\rho \vec{v} \cdot d\vec{A})$$

$$B = (m, m \cdot \vec{v}, E) \leadsto b = (1, \vec{v}, e)$$

Continuidade $\frac{Dm}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$

Momento $\frac{D(m \cdot \vec{v})}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \vec{v} (\rho dV) + \int_{SC} \vec{v} (\rho \vec{v} \cdot d\vec{A}) = \sum \vec{F}_s$

Energia $\frac{DE}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} e (\rho dV) + \int_{SC} e (\rho \vec{v} \cdot d\vec{A}) = \dot{Q} + \dot{W}$

ESCOAMENTOS ISOENTRÓPICO UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE

Conservação de Massa para escoamento permanente

Continuidade $\frac{Dm_s}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV + \int_{sc} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$

$$\int_{sc} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0$$

ESCOAMENTOS ISOENTRÓPICO UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE

Conservação de Massa para escoamento permanente Unidimensional

$$\int_{sc} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{A}_1 < 0$$

$$|\vec{V}_1| |\vec{A}_1| \cos \theta$$



$$\vec{V}_2 \cdot \vec{A}_2 > 0$$

$$\rho_1 \vec{V}_1 \cdot \vec{A}_1 + \rho_2 \vec{V}_2 \cdot \vec{A}_2 = 0$$

$$-\rho_1 V_1 A_1 + \rho_2 V_2 A_2 = 0$$

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$$

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$$

ESCOAMENTOS ISOENTRÓPICO UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE

Quantidade de movimento para escoamento permanente

2.ª LEI NEWTON: $\frac{D(m\vec{v})}{Dt} = \cancel{\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{v} dV} + \int_{sc} (\rho \vec{v} \cdot d\vec{A}) \vec{v} = \sum \vec{F}$

$$\int_{sc} \vec{v} (\rho \vec{v} \cdot d\vec{A}) = \int_{VC} \vec{v} \cdot \rho dV - \int p d\vec{A}$$

ESCOAMENTOS ISOENTRÓPICO UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE

Quantidade de movimento para escoamento permanente Unidimensional desprezando forças de corpo

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + \cancel{V_y \vec{j}} + \cancel{V_z \vec{k}}$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{A}_1 < 0$$

$$\rho_1 \vec{A}_1 < 0$$

$$\int_{sc} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) = - \int_{sc} p d\vec{A}$$



$$\vec{V}_2 \cdot \vec{A}_2 > 0$$

$$\rho_2 \vec{A}_2 > 0$$

$$\rho_1 \vec{V}_1 \cdot \vec{A}_1 \vec{V}_1 + \rho_2 \vec{V}_2 \cdot \vec{A}_2 \vec{V}_2 = - [p_1 \vec{A}_1 + p_2 \vec{A}_2]$$

$$-\rho_1 V_1^2 A_1 + \rho_2 V_2^2 A_2 = p_1 A_1 - p_2 A_2$$

$$\boxed{\rho_2 V_2^2 + p_2 = \rho_1 V_1^2 + p_1}$$

ESCOAMENTOS ISOENTRÓPICO UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE

Conservação de Energia para escoamento permanente

1ª LEI TERMODINÂMICA: $\frac{DE_s}{dt} = \cancel{\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho g dV} + \int_{sc} (\rho \vec{v} \cdot d\vec{A}) = \dot{Q} + \dot{W}$

$$\int_{sc} (\rho \vec{v} \cdot d\vec{A}) = \cancel{\dot{Q}} + \int_{VC} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho dV - \int_{sc} \vec{v} \cdot P d\vec{A}$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

$$\dot{W} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{d}}{dt} \Rightarrow \vec{F}_0 \cdot \vec{V}$$

ESCOAMENTOS ISOENTRÓPICO UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE

Conservação de Energia para escoamento permanente Unidimensional

$$\int_{sc} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = - \int_{sc} \vec{v} \cdot \vec{p} \cdot d\vec{A}$$

$\vec{V}_1 \cdot \vec{A}_1 < 0$
 $\rho_1 \cdot \vec{A}_1 < 0$



$\vec{V}_2 \cdot \vec{A}_2 > 0$
 $\rho_2 \cdot \vec{A}_2 > 0$

$$\rho_1 \vec{V}_1 \cdot \vec{A}_1 \cdot \vec{e}_1 + \rho_2 \vec{V}_2 \cdot \vec{A}_2 \cdot \vec{e}_2 = - [\vec{V}_1 \cdot \vec{p}_1 \cdot \vec{A}_1 + \vec{V}_2 \cdot \vec{p}_2 \cdot \vec{A}_2]$$

$$-\frac{\rho_1 V_1 A_1 e_1}{\rho_1 V_1 A_1} + \frac{\rho_2 V_2 A_2 e_2}{\rho_2 V_2 A_2} = + \frac{\rho_1 V_1 A_1}{\rho_1 V_1 A_1} - \frac{\rho_2 V_2 A_2}{\rho_2 V_2 A_2}$$

$$e_2 - e_1 = \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \Rightarrow e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} = e_1 + \frac{p_1}{\rho_1}$$

$$h \equiv u + p \cdot v$$

$$e = u + \frac{V^2}{2} + gZ$$

$$h_2 + \frac{V_2^2}{2} + gZ_2 = h_1 + \frac{V_1^2}{2} + gZ_1 + g$$

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \quad \rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$$

$$\rho_1 V_1^2 + p_1 = \rho_2 V_2^2 + p_2$$

$$g \left(h_1 + \frac{V_1^2}{2} + \cancel{gz_1} \right) = g \left(h_2 + \frac{V_2^2}{2} + \cancel{gz_2} \right)$$

Equações para gases ideais

$$p = \rho R T ; \quad \Delta h = c_p \Delta T ; \quad c = \sqrt{k R T} = \sqrt{k \frac{p}{\rho}}$$

Equações isoentrópicas para gases ideais

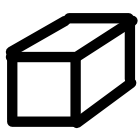
$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{1-k} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{k-1}$$

ESCOAMENTO ISOENTRÓPICO UNIDIMENSIONAL

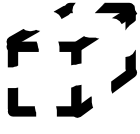
Estados de Referência: propriedades de estagnação e críticas.
Equações em função de Mach

Condição de estagnação

Imaginar desaceleração isentrópica até $V=0$

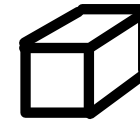


1

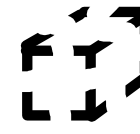


1o

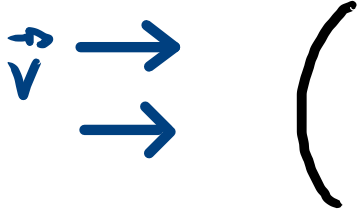
$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \cancel{\frac{V_2^2}{2}}$$



2



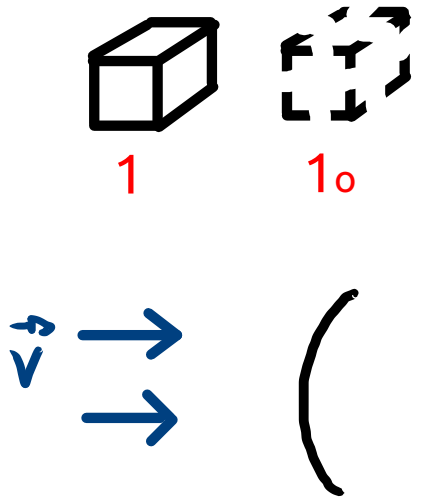
2o



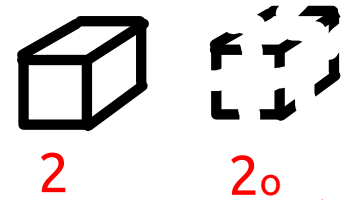
$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 = h_{2o}$$

Condição de estagnação

Imaginar desaceleração isoentrópica até $V=0$



$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2}$$



$$h_{o1} = h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = h_{o2} = \text{constante}$$

$$h_o = h + \frac{V^2}{2}$$

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2}$$

$$C_p T_0 = C_p T + \frac{V^2}{2}$$

$$T_0 = T + \frac{V^2}{2 C_p}$$

$$h_{01} = h_{02}$$

$$T_{01} = T_{02} \checkmark$$

Equação em função de Mach

$$T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p}$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{V^2}{2c_p T}$$

$$M = \frac{V}{c} \leadsto V = M \cdot \sqrt{kRT}$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{M^2 kRT}{2c_p T}$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{M^2}{2} \frac{kR}{c_p}$$

Temperatura de estagnação

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{M^2}{2} \frac{kR}{C_p}$$

$$\frac{kR}{C_p} = \frac{k(C_p - C_v)}{C_p} = k \left(1 - \frac{1}{k} \right) = k \left(\frac{k-1}{k} \right) = k-1$$

$$h = u + p.v$$

$$C_p.T = C_v.T + R.T$$

$$C_p = C_v + R$$

$$R = C_p - C_v$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{(k-1)}{2} M^2$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{(k-1)}{2} M^2$$

Loading ...

Exemplo: calcule a temperatura de estagnação para veículo a:

a) 300Km/h

b) 800 Km/h

c) 2000Km/h

Considerar $T=25^{\circ}\text{C}$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2$$

$$C = \sqrt{1,4 \times 287 \times (25 + 273,15)} = 331,6 \text{ m/s}$$

$V [\text{km/h}]$	$V [\text{m/s}]$	M	T_0/T	T_0	ΔT
300	83,33	0,2513	1,012	303,926 K = 18,17°C	3,17°C
800	222,22	0,67	1,0838	324,94 K = 51,78°C	26,78°C
2000	555,55	1,67	1,56	465,54 K = 192,38°C	167,38°C

$$M = 3,5 \Rightarrow \frac{T_0}{T} = 3,45 \rightarrow \Delta T \approx 130,5^{\circ}\text{C}$$

Pressão de estagnação

DAS EQUAÇÕES ISENTRÓPICAS

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{k-1}{k}}$$

$$\frac{P_0}{P} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{P_0}{P} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

Loading ...

Exemplo: calcule a pressão de estagnação para veículo a:

a) 300Km/h

b) 800 Km/h

c) 2000Km/h

Considerar $T=25^{\circ}\text{C}$ e $P=100\text{KPa}$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2$$

$$\frac{P_0}{P} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{k/k-1}$$

$$\frac{k}{k-1} = 3,5$$

$$C = \sqrt{1,4 \times 287 \times (25 + 273,15)} = 331,6 \text{ m/s}$$

$V [\text{km/h}]$	$V [\text{m/s}]$	M	T_0/T	P_0/P	$P_0 [\text{kPa}]$
300	83,33	0,2513	1,012	1,0426	104,26
800	222,22	0,67	1,0838	1,3511	135,11
2000	555,55	1,67	1,56	4,718	471,81

Massa específica de estagnação

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{k-1}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{1/(k-1)}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right]^{1/(k-1)}$$

Loading ...

$$\frac{1_0}{T}$$

$$\frac{1_0}{P}$$

$$\frac{1_0}{S}$$

Propiedades Críticas*: M=1

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{(k-1)}{2} M^2$$

$$\text{Si } M=1 \Rightarrow T=T^* \quad \leadsto \quad \frac{T_0}{T^*} = 1 + \frac{(k-1)}{2}$$

$$\frac{T_0}{T^*} = \frac{2+k-1}{2}$$

$$\frac{T_0}{T^*} = \frac{k+1}{2}$$

$$\boxed{\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1}}$$

$$\text{p/oa: } k=1,4$$

$$\frac{T^*}{T_0} = 0,833$$

Propiedades Críticas*: M=1

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{(k-1)}{2} M^2$$

$$\text{Si } M = 1 \Rightarrow T = T^* \quad \leadsto \quad \frac{T_0}{T^*} = 1 + \frac{(k-1)}{2}$$

$$\frac{T_0}{T^*} = \frac{2 + k - 1}{2}$$

$$\frac{T_0}{T^*} = \frac{k+1}{2}$$

$$\boxed{\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1}}$$

$$\text{p/ou: } k = 1,4$$

$$\frac{T^*}{T_0} = 0,833$$

Propiedades Críticas*: M=1

$$\frac{P_0}{P} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\text{Se } M = 1 \Rightarrow P = P^* \Rightarrow \frac{P_0}{P^*} = \left(\frac{T_0}{T^*} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{P^*}{P_0} = \left(\frac{T^*}{T_0} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{P^*}{P_0} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\text{para: } k = 1.4 \Rightarrow \frac{P^*}{P_0} = 0.5283$$

Propriedades Críticas*: M=1

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{1/k-1}$$

$$\text{Se } M=1 \Rightarrow p = p^* \Rightarrow \frac{p_0}{p^*} = \left(\frac{T_0}{T^*} \right)^{1/k-1}$$

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{T^*}{T_0} \right)^{1/k-1}$$

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{1/k-1}$$

$$\text{para: } k=1,4 \Rightarrow \frac{p^*}{p_0} = 0,6339$$

Tabela para Escoamento Isoentrópico

M	$\frac{T_0}{T}$	$\frac{P_0}{P}$	$\frac{\rho_0}{\rho}$	$\frac{T_0}{T^*}$	$\frac{P_0}{P^*}$	$\frac{\rho_0}{\rho^*}$
-----	-----------------	-----------------	-----------------------	-------------------	-------------------	-------------------------

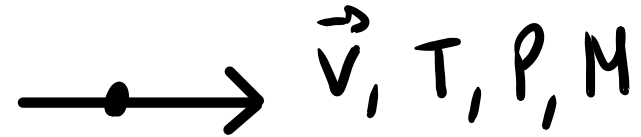
Loading ...

ESCOAMENTO ISOENTRÓPICO UNIDIMENSIONAL

Velocidades de referência

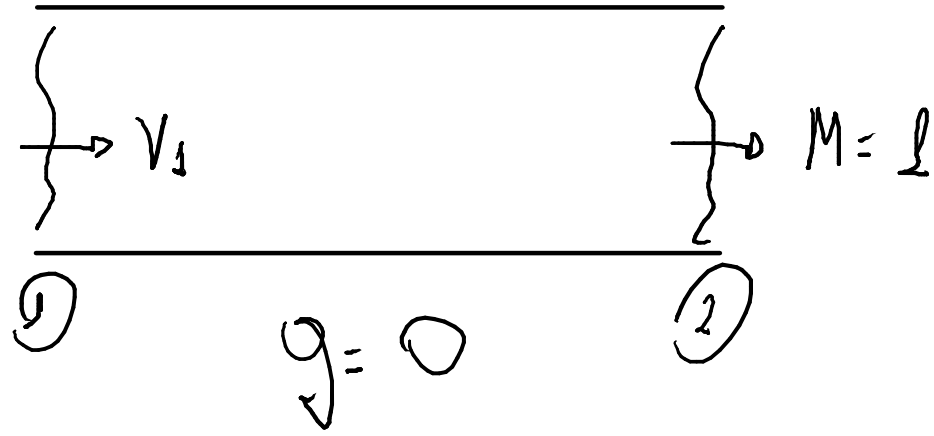
www.cienciastermicas.com

Hipoteticamente, levar o escoamento a $M=1$ adiabaticamente



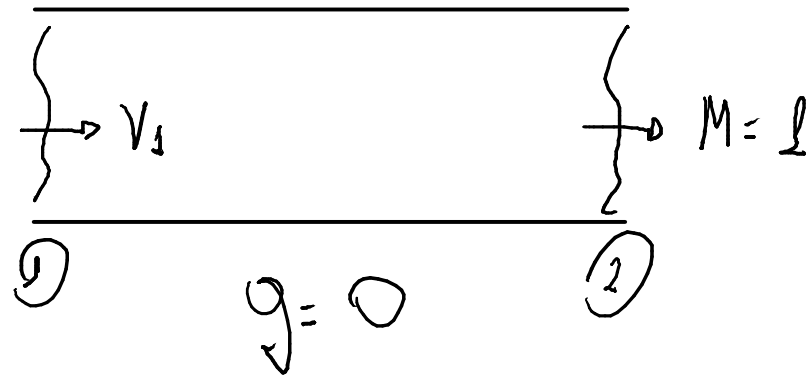
Se $M > 1 \Rightarrow$ Hipoteticamente desacelerar para $M=1$ adiabaticamente

Se $M < 1 \Rightarrow$ Hipoteticamente acelerar para $M=1$ adiabaticamente



$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} + \cancel{g z_1} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} + \cancel{g z_2}$$

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2}$$



$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2}$$

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} = h_1 - h_2$$

$$\Delta h = c_p \Delta T$$

$$\frac{1}{2} (V_2^2 - V_1^2) = c_p (T_1 - T_2)$$

$$V_2^2 - V_1^2 = 2 c_p (T_1 - T_2)$$

$$V_2^2 - V_1^2 = 2 c_p (T_1 - T_2)$$

$$\text{Se } M_1 < 1 \Rightarrow M_2 = 1$$

$$V_1 < V_2$$

$$V_2^2 - V_1^2 > 0$$

$$2 c_p (T_1 - T_2) > 0$$

$$T_1 - T_2 > 0$$

$$T_1 > T_2$$

$$V_2 > V_1$$

$$T_2 < T_1$$

$$V_2' - V_1' = 2 c_p (T_1 - T_2)$$

Se $M_1 > 1 \Rightarrow M_2 = 1$

$$V_2 < V_1$$

$$V_2' - V_1' < 0$$

$$2 c_p (T_1 - T_2) < 0$$

$$T_1 - T_2 < 0$$

$$T_1 < T_2$$

$$V_2 < V_1$$

$$T_2 > T_1$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \bullet \\ A \end{array} \quad \vec{V}, T, \rho, \beta, \quad c = \sqrt{kRT}$$

✧ Imaginar que o fluido desacelera isoentropicamente para $V=0$

↳ fluido estagnado

$$\begin{array}{l} p \mid \vec{V} = 0 \quad \text{Pressão total ou Estagnação } P_0 \\ \text{Temperatura total " } \sim T_0 \end{array}$$

✧ Condição para Mach=1 $\Rightarrow V=c \Rightarrow T^*, \rho^*, \beta^*$

$$T^* \Rightarrow c^* = \sqrt{kRT^*} \Rightarrow M^* = \frac{V}{c^*} \neq 1$$

3 Velocidades de Referência:

$$c_p T_1 + \frac{V_1^2}{2} = c_p T_0$$

$$\star \quad \frac{V^2}{2c_p} = T_0 - T$$

$$V = \sqrt{2c_p(T_0 - T)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T = 0 \Rightarrow V_{MAX} = \sqrt{2c_p T_0} \quad (1) \\ T = T_0 \Rightarrow V_{min} = 0 \end{array} \right.$$

$$\star \quad C_0 = \sqrt{kR \cdot T_0}$$

Velocidade do som na temperatura de estagnação

$$\star \quad V^* = C^* = \sqrt{kR T^*}$$

$$* \quad V^* = C^* = \sqrt{k R T^*}$$

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1}$$

$$V^* = C^* = \sqrt{k R 2 \frac{T_0}{k+1}}$$

$$V^* = C^* = \sqrt{\frac{2}{k+1} k R T_0}$$

$$V^* = C^* = \sqrt{\frac{2}{k+1} k R T_0}$$

$$\frac{C^*}{C_0} = \frac{\sqrt{\frac{2}{k+1} k R T_0}}{\sqrt{k R T_0}}$$

$$\frac{C^*}{C_0} = \sqrt{\frac{2}{k+1}}$$

$$\leadsto p/a \quad \frac{C^*}{C_0} = 0,913$$

$$\frac{V_{max}}{C_0} = \frac{\sqrt{2 C_p T_0}}{\sqrt{k R T_0}}$$

$$\frac{V_{max}}{C_0} = \sqrt{2 \frac{C_p}{k R}}$$

$$\frac{k R}{C_p} = \frac{k (C_p - C_v)}{C_p} = k \left(1 - \frac{1}{k} \right) = k \left(\frac{k-1}{k} \right) = k-1$$

$$\frac{V_{max}}{C_0} = \sqrt{\frac{2}{k-1}}$$

pl on : $\frac{V_{max}}{C_0} = 2,24$

$$\frac{V_{max}}{C^*} = \frac{\sqrt{2 c_p T_0}}{\sqrt{k R T^*}}$$

$$\frac{V_{max}}{C^*} = \sqrt{2 \frac{c_p}{k R} \frac{T_0}{T^*}}$$

$$\frac{V_{max}}{C^*} = \sqrt{\left(\frac{2}{k-1}\right) \left(\frac{k+1}{2}\right)}$$

$$\frac{V_{max}}{C^*} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$$

$$\frac{T_0}{T^*} = 1 + \frac{(k-1) M^2}{2}$$

P / An: $\frac{V_{max}}{C^*} = 2.45$

FORMAS ALTERNATIVAS DA EQ. ENERGIA

$$\cancel{h} + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2}$$

p/ GÁS IDEAL $h = c_p T \Rightarrow c_p T_1 + \frac{V_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{V_2^2}{2}$

$$R = c_p - c_v \Rightarrow \frac{R}{c_p} = \frac{c_p}{c_p} - \frac{c_v}{c_p} \Rightarrow \frac{R}{c_p} = 1 - \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{R}{c_p} = \frac{k-1}{k} \Rightarrow c_p = \frac{k R}{k-1}$$

$$\text{Logo: } \left(\frac{k R}{k-1} T_1 \right) + \frac{V_1^2}{2} = \left(\frac{k R}{k-1} T_2 \right) + \frac{V_2^2}{2}$$

$$c^2 = k R T$$

$$\therefore \left\{ \frac{c_1^2}{k-1} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{c_2^2}{k-1} + \frac{V_2^2}{2} \right\}$$

$$\cancel{\phi} \quad \frac{C_1^2}{k-1} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{C_2^2}{k-1} + \frac{V_2^2}{2}$$

$$V^* = C^* \quad (M=1)$$

$$\text{SEJA } V_2 = C_2 \quad (M_2 = 1)$$

$$\frac{C^2}{k-1} + \frac{V^2}{2} = \frac{C^{*2}}{k-1} + \frac{C^{*2}}{2}$$

$$\frac{C^2}{k-1} + \frac{V^2}{2} = \frac{2C^{*2} + kC^{*2} - C^{*2}}{2(k-1)}$$

$$\boxed{\frac{C^2}{k-1} + \frac{V^2}{2} = \frac{C^{*2}(k+1)}{2(k-1)}}$$

DADO C e V , podemos

CALCULAR C^* $\Rightarrow$ VELOCIDADE ASSOCIADA ao ponto 1

$$\frac{C^2}{k-1} + \frac{V^2}{2} = \frac{C^{*2} (k+1)}{2(k-1)}$$

$$\div V^2$$

$$\frac{\left(\frac{C}{V}\right)^2}{k-1} + \frac{1}{2} = \frac{\left(\frac{C^*}{V}\right)^2 \frac{(k+1)}{2(k-1)}}$$

$$M^* = \frac{V}{C^*}$$

Não é o Mach para velocidade sônica!!

$$\frac{\frac{1}{M^2}}{k-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{M^{*2}} \frac{(k+1)}{2(k-1)}$$

$$\frac{1}{M^2 \cancel{(k-1)}} \frac{2 \cancel{(k-1)}}{(k+1)} + \frac{1}{2} \frac{2 \cancel{(k-1)}}{(k+1)} = \frac{1}{M^{*2}}$$

$$\frac{2}{M^2(k+1)} + \frac{(k-1)}{(k+1)} = \frac{1}{M^{*2}}$$

$$M^{*2} = \frac{1}{\frac{2}{M^2(k+1)} + \frac{(k-1)}{(k+1)}}$$

$$M^{*2} = \frac{M^2(k+1)}{2 + M^2(k-1)}$$

$$M^* = \frac{M^2 (k+1)}{2 + M^2(k-1)}$$

Loading ...

$$p / M = 1 \rightarrow M^* = 1$$

$$p / M < 1 \rightarrow M^* < 1$$

$$p / M > 1 \rightarrow M^* > 1$$

$$p / M \rightarrow \infty \rightarrow M^* \rightarrow \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$$

