

ESCOAMENTO COM VARIAÇÃO DE ÁREA

Bocas e difusores



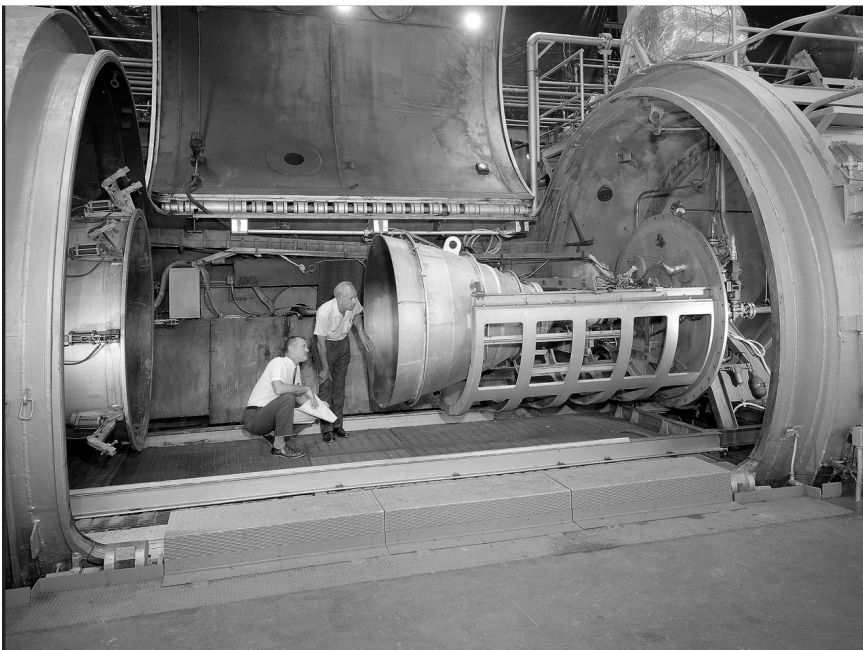
https://www.wikiwand.com/en/Propelling_nozzle

www.cienciastermicas.com

Conteúdo

- *Apresentação, motivação, objetivos do curso, introdução aos escoamentos compressíveis
- *Revisão de Termodinâmica: 1ª e 2ª Leis, trabalho, calor, calor específico
- *Gases ideais: definição, entropia, equações isoentrópicas
- *Equações governantes na formulação integral: conservação de massa, 2ª Lei de Newton e Conservação de energia
- *Velocidade do som: definição, equação; velocidade do som em gases; cone de Mach
- *Escoamento unidimensional
- *Propriedades de estagnação; propriedades características; equações em função de Mach
- *Escoamento com variação de área
- *Choque normal: equações, estados de referência, propriedades antes e depois do choque
- *Escoamento com adição de calor (Rayleigh)
- *Escoamento com atrito (Fanno)
- *Choque Oblíquo
- *Escoamento supersônico

An Apollo Contour rocket nozzle in the Propulsion Systems Laboratory at the National Aeronautics and Space Administration (NASA) Lewis Research Center



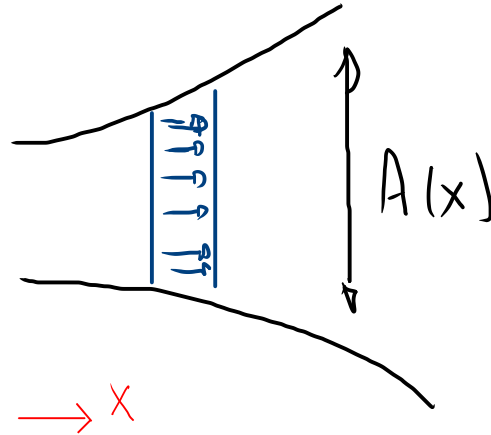
<https://images-assets.nasa.gov/image/GRC-1964-C-70929/GRC-1964-C-70929--orig.jpg>

V2 combustion chamber 1944



<https://v2rockethistory.com/gmedia/policeman-with-engine-jpg/>

Escoamento compressível com mudança de área



- *Mudança de área gradual
- *desprezar efeitos viscoso
- *isoentrópico
- *regime permanente
- *escoamento quasi-1D -> variações em x

$$\dot{m} = \rho \cdot v \cdot A = \text{constante}$$

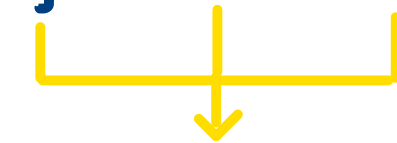
Diferenciar

$$v A d\rho + \rho A dv + \rho v dA = 0$$

Dividir pela taxa mássica

$$\frac{v A d\rho}{\rho v A} + \frac{\rho A dv}{\rho v A} + \frac{\rho v dA}{\rho v A} = \frac{0}{\rho v A}$$

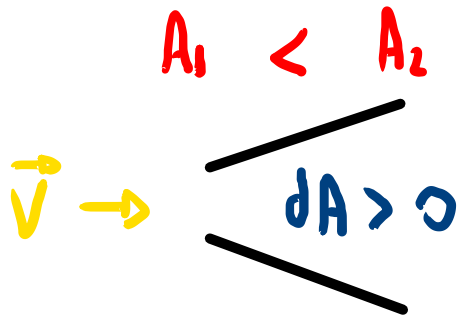
$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0$$



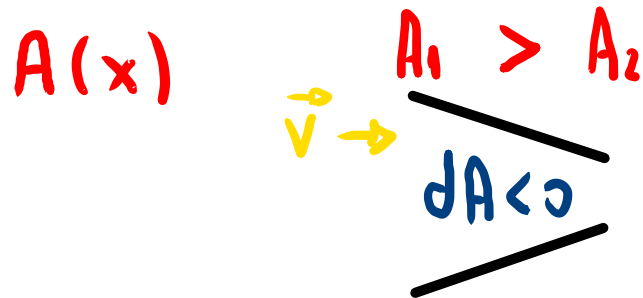
DILATAÇÕES

Para escoamento incompressível: $dg = 0$

$$\cancel{\frac{d\rho}{\rho}} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0$$
$$\frac{dV}{V} = - \frac{dA}{A}$$



$$dA > 0 \leadsto -dA < 0 \Rightarrow dV < 0$$



$$dA < 0 \leadsto -dA > 0 \Rightarrow dV > 0$$

Para escoamento Compressível $dg \neq 0$

↳ Outras formas de satisfazer a conservação de massa

*Conservação de Energia

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2} = \text{constante}$$

$$h + \frac{V^2}{2} = \text{const.} \Rightarrow dh + V dV = 0$$

DE Gibbs: $\cancel{T ds} = dh - v dP \Rightarrow dh = v dP \Rightarrow dh = \frac{dP}{S}$

$$\frac{dP}{S} + V dV = 0 \rightarrow \frac{dP}{S} = -V dV \quad (1)$$

Pressão e Velocidade SEMPRE têm tendências opostas

$$\frac{dP}{\rho} = -v dv \quad (1)$$

$$c^2 = \frac{dP}{d\rho} \Big|_s \quad \leadsto \quad dP = c^2 d\rho$$

$$c^2 \frac{d\rho}{\rho} = -v dv$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{v dv}{c^2} = 0$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{v \cancel{v} dv}{\cancel{v} c^2} = 0$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{v^2}{c^2} \frac{dv}{v} = 0 \quad \leadsto \quad \frac{d\rho}{\rho} + M^2 \frac{dv}{v} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dp}{\rho} = -M^2 \frac{dV}{V} \quad (2)$$

dp e dV VARIAM EM DIREÇÕES OPOSTAS!

$$dV \uparrow (>0) \leadsto dp \downarrow (<0)$$

Para escoamento

SUBSÔNICO $M < 1 \Rightarrow M^2 \ll 1$

$$\frac{dp}{\rho} \ll \frac{dV}{V}$$

Variação em função da Área e Mach

$$\frac{ds}{s} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0$$

$$\frac{dp}{s} = -v dV \quad (1)$$

$$\frac{dp}{s} = -M^2 \frac{dV}{V} = 0 \quad (2)$$

$$-M^2 \frac{dV}{V} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0$$

$$\frac{dV}{V} (1 - M^2) + \frac{dA}{A} = 0$$

$$\frac{dV}{V} = - \frac{1}{(1 - M^2)} \frac{dA}{A} \quad (3)$$

Variação em função da Área e Mach

$$\frac{dp}{\rho} = -v dv \quad (1)$$

$$\frac{dp}{\rho} = -M^2 \frac{dv}{v} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{(1-M^2)} \frac{dA}{A} \quad (3)$$

$$(1) \quad \frac{dp}{\rho} = -v dv$$

$$\rho \frac{dp}{v^2} = -\frac{v}{v^2} dv$$

$$\frac{dp}{\rho v^2} = -\frac{dv}{v}$$

$$\frac{dp}{\rho v^2} = \frac{1}{(1-M^2)} \frac{dA}{A} \quad (4)$$

Variação em função da Área e Mach

$$\frac{dp}{\rho} = -v dv \quad (1)$$

$$\frac{dp}{\rho} = -M^2 \frac{dv}{v} = 0 \quad (2)$$

$$+ \frac{dv}{v} = - \frac{1}{(1-M^2)} \frac{dA}{A} \quad (3)$$

$$+ \frac{dp}{\rho v^2} = \frac{1}{(1-M^2)} \frac{dA}{A} \quad (4)$$

$$M > 1 \leadsto 1 - M^2 < 0$$

$$M < 1 \leadsto 1 - M^2 > 0$$

$$\frac{dp}{\rho} = -v dv \quad (1)$$

$$\frac{dp}{\rho} = -M^2 \frac{dv}{v} = 0 \quad (2)$$

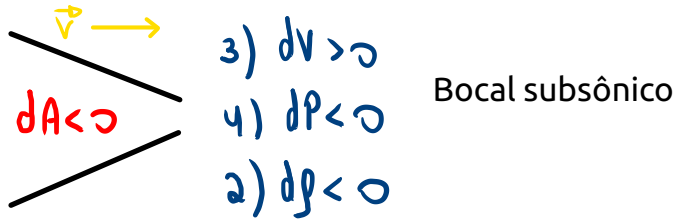
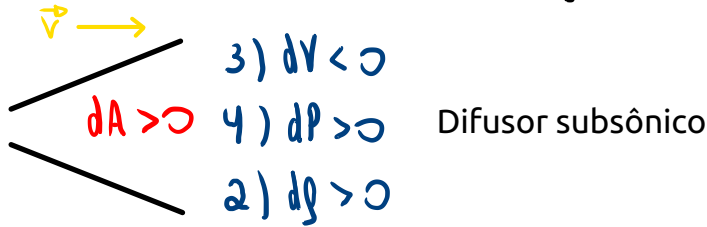
$$+ \frac{dv}{v} = -\frac{1}{(1-M^2)} \frac{dA}{A} \quad (3)$$

$$+ \frac{dp}{\rho v^2} = \frac{1}{(1-M^2)} \frac{dA}{A} \quad (4)$$

Escoamento Subsônico

$$M < 1 \approx 1 - M^2 > 0 \quad \rightarrow dv \propto -dA$$

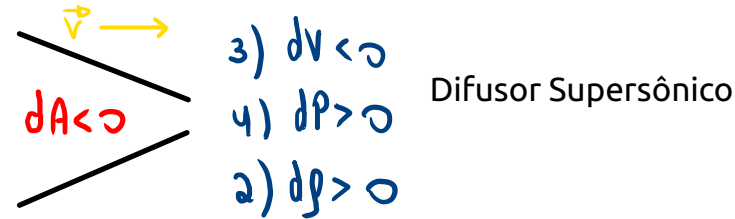
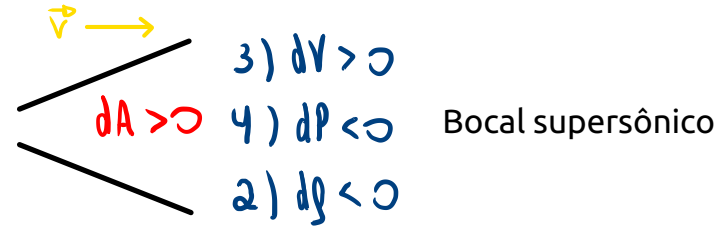
$$\rightarrow dp \propto dA$$



Escoamento Supersônico

$$M > 1 \approx 1 - M^2 < 0 \quad \rightarrow dv \propto dA$$

$$\rightarrow dp \propto -dA$$



Bocal de Laval

Bocal convergente - Divergente

única maneira de levar um escoamento subsônico para supersônico



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:LE-5_engine.jpg



https://www.wikiwand.com/en/De_Laval_nozzle

Bocal de Laval

Bocal convergente - Divergente

única maneira de levar um escoamento subsônico para supersônico

$$\frac{dp}{\rho} = -v dv \quad (1)$$

$$\frac{dp}{\rho} = -M^2 \frac{dv}{v} = 0 \quad (2)$$

$$+ \frac{dv}{v} = - \frac{1}{(1-M^2)} \frac{dA}{A} \quad (3)$$

$$+ \frac{dp}{\rho v^2} = \frac{1}{(1-M^2)} \frac{dA}{A} \quad (4)$$

$$\frac{dv}{v} = - \frac{1}{(1-M^2)} \frac{dA}{A}$$

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{dv}{v}$$

$$\text{p/ } M=1 \rightarrow M^2-1=0 \Rightarrow dA=0$$

Escoamento sônico ocorre onde a área não varia !!

Área Máxima OU Mínima

Pontos Sônicos Possíveis

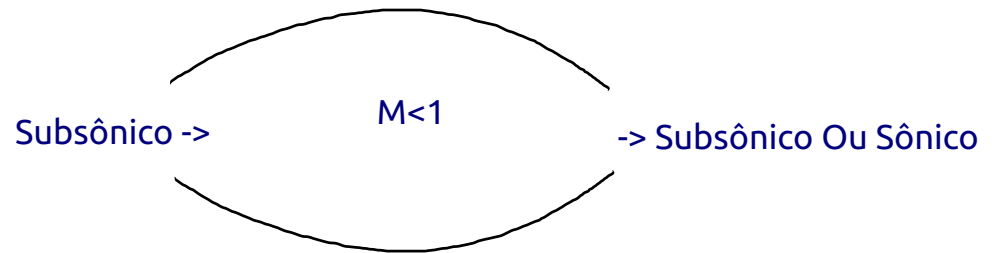
Subsônico $\rightarrow$ $M=1$ Supersônico $\rightarrow$

A_{min}
(Garganta)

$dA \downarrow \rightarrow dV \uparrow$ | $dA \uparrow \rightarrow dV \downarrow$

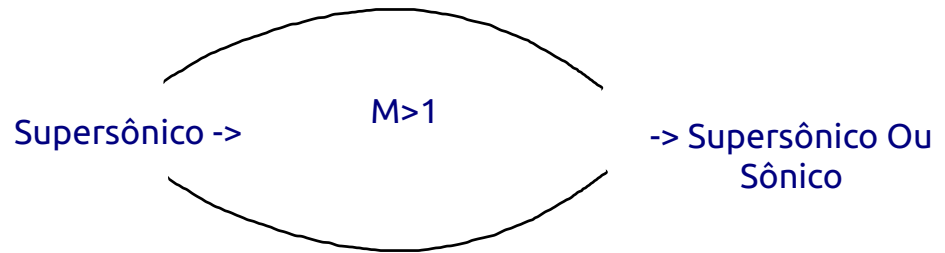
Bocal de Laval ou
Bocal Convergente-Divergente (CD)

$$\frac{dv}{v} = - \frac{1}{(1-M^2)} \frac{dA}{A}$$



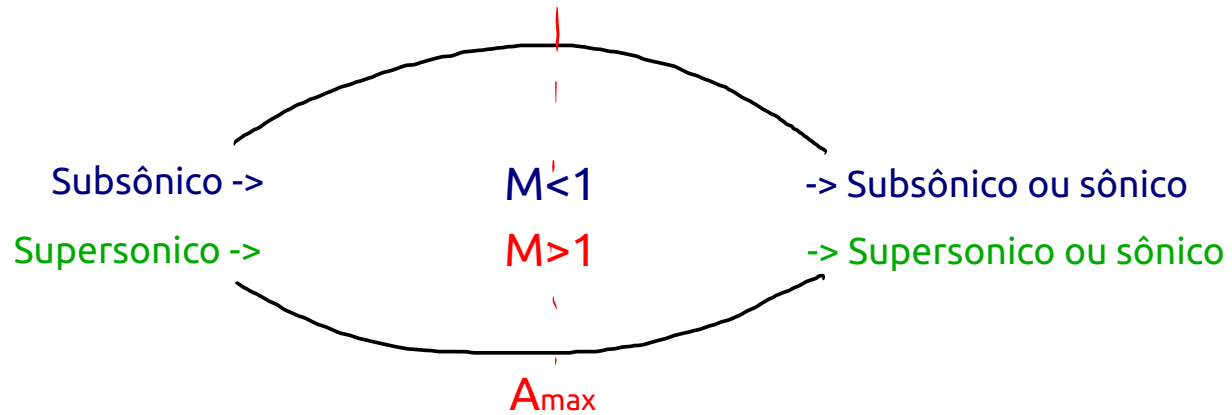
A_{max}

$$dA \uparrow \sim dv \downarrow \quad dA \downarrow \sim dv \uparrow$$



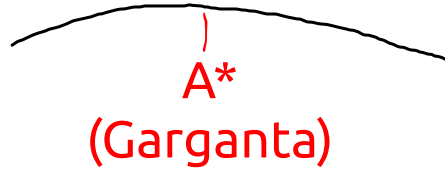
A_{max}

$$dA \uparrow \sim dv \uparrow \quad dA \downarrow \sim dv \downarrow$$



Somente o bocal de Laval ou Bocal convergente-divergente
produz $M=1$ onde $dA=0$

Subsônico -> $M=1$ Supersônico ->



Continuidade

$$\dot{m} = \rho V A \Rightarrow A = \frac{\dot{m}}{\rho \cdot V}$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\cancel{\dot{m}}}{\rho V} \cdot \frac{\rho^* \cdot V^*}{\cancel{\dot{m}}}$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^*}{\rho} \cdot \frac{V^*}{V} \quad (1)$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\dot{m}}{\rho^* V} \cdot \frac{\rho^* V^*}{\dot{m}}$$

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2}$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^*}{\rho} \cdot \frac{V^*}{V} \quad (1)$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{(k-1)}{2} M^2 \quad \sim \quad \frac{T_0}{T^*} = 1 + \frac{k-1}{2} = \frac{2+k-1}{2} = \frac{k+1}{2}$$

$$\frac{T_0}{T} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{k-1}$$

$$\frac{T_0}{T^*} = \left(\frac{\rho_0}{\rho^*}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{\rho_0}{\rho^*}\right)^{k-1}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho^*} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{k/k-1}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{1/k-1}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho^*} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{1/k-1}$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^*}{\rho} \cdot \frac{v^*}{v} \quad (1)$$

$$\frac{p_2}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{p_2}{p^*} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{k/(k-1)}$$

$$\frac{p_2}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{1/(k-1)}$$

$$\frac{p_2}{p^*} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{1/(k-1)}$$

$$\frac{p}{p^*} = \frac{p}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{1/(k-1)} \cdot \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{1/(k-1)}$$

$$\frac{V^*}{V} = \frac{\sqrt{k R T^*}}{V}$$

$$\frac{V^*}{V} = \frac{\sqrt{k R T^* \cdot \frac{T}{T^*}}}{V}$$

$$\frac{V^*}{V} = \frac{\sqrt{k R T}}{V} \sqrt{\frac{T^*}{T}}$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \left(\frac{k-1}{2}\right) M^2 \quad \approx \quad \frac{T_0}{T^*} = \frac{k+1}{2}$$

$$\frac{T^*}{T} = \frac{T^*}{T_0} \cdot \frac{T_0}{T} = \left(\frac{2}{k+1}\right) \cdot \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)$$

$$\frac{V^*}{V} = \frac{1}{M} \left[\left(\frac{2}{k+1}\right) \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right) \right]^{1/2}$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^*}{\rho} \cdot \frac{v^*}{v} \quad (1)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{\rho^*}{\rho_0} \cdot \frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{1/(k-1)} \cdot \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{1/(k-1)}$$

$$\frac{v^*}{v} = \frac{1}{M} \left[\left(\frac{2}{k+1}\right) \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right) \right]^{1/2}$$

$$\frac{A}{A^*} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{1/(k-1)} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{1/(k-1)} \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{1/2} \frac{1}{M}$$

$$\frac{1}{k-1} + \frac{1}{2} = \frac{2 + k-1}{2(k-1)} = \frac{k+1}{2(k-1)}$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

Subsônico | Supersônico

