

Rodrigo Lisita Ribera

TRANSFERÊNCIA DE CALOR

Ciências Térmicas

*CT

www.cienciastermicas.com

Agradecimentos

Agradeço ao CNPQ, à CAPES e à PETROBRÀS, que financiaram minha Iniciação Científica, Mestrado e Doutorado.

À todos os meus alunos.

Lista de ilustrações

Figura 2.1 – a) Temperatura é um campo escalar: possui valor em determinada coordenada espacial; b) Isotermas (curvas de igual temperatura) e vetor gradiente apresentado em dois pontos (com direção normal à isoterma no ponto e sentido de crescimento do campo escalar	20
Figura 2.2 – Um sistema fechado recebendo calor de uma fonte externa sofrerá aumento de sua energia E e consequentemente aumento de sua temperatura	23
Figura 2.3 – Um sistema fechado recebendo trabalho de uma fonte externa sofrerá aumento de sua energia E e consequentemente aumento de sua temperatura. New determination of the mechanical equivalent of heat, 1878	24
Figura 2.4 – Um sistema fechado com paredes rígidas recebendo calor de uma fonte externa à volume constante sofrerá aumento de sua energia $dE = m.c.\Delta T$	29
Figura 2.5 – Um sistema fechado to tipo pistão-cilindro recebe calor de uma fonte externa à pressão constante sofrerá aumento de sua energia $dE = m.c.\Delta T$	30
Figura 3.1 – Da mesma forma que uma diferença de potencial ΔU	39
Figura 3.2 – Parede com superfície à temperatura T_s exposta a convecção com o meio.	39
Figura 3.3 – Resistência térmica em série	40
Figura 3.4 – As Paredes B e C podem ser representadas por resistências térmicas dispostas em paralelo.	41
Figura 5.1 – Placa plana sem geração de calor e temperaturas conhecidas nas paredes	48
Figura 5.2 – Perfil de temperatura na placa em função da posição x e sentido do fluxo de calor	52
Figura 5.3 – Perfil de temperatura para fluxo de calor constante $q' = 41666,67[W/m^2]$, temperatura na face esquerda fixa em $T = 100^{\circ}C$, placa com espessura de $60[mm]$ e condutividades térmicas de $30[W/m.K]$, $40[W/m.K]$, $50[W/m.K]$, $60[W/m.K]$, $100[W/m.K]$ e $1000[W/m.K]$	54
Figura 6.1 – Placa plana com geração de calor e temperaturas conhecidas nas paredes	56
Figura 6.2 – Perfil de temperatura para condução unidimensional com geração de calor interno e temperaturas das paredes especificadas $T_2 = 100[^{\circ}C]$ e $T_1 = 100[^{\circ}C]$, $T_1 = 150[^{\circ}C]$ e $T_1 = 200[^{\circ}C]$	60

Figura 6.3 – Perfil de temperatura para condução unidimensional com geração de calor interno e temperaturas das paredes especificadas. Valores apresentados para geração interna $\dot{q}$ e para o caso em que a geração de calor interno é duplicada ($2.\dot{q}$)	63
Figura 6.4 – Comparação entre os perfis de temperatura para resolução com a Eq.6.10 (considerando a parede entre $0 \leq x \leq 0.6[m]$ e condições de contorno de temperaturas especificadas) e a Eq.6.18 (considerando a parede entre $-0.3 \leq x \leq +0.3[m]$) e condição de contorno de simetria	64
Figura 7.1 – Parede composta em série	67
Figura 7.2 – Representação por nós e resistências térmicas e Resistência térmica equivalente	68
Figura 7.3 – Volume de controle na face esquerda. O calor que chega por convecção na face é conduzido através da parede A	70
Figura 7.4 – Circuito térmico considerado para cálculo da temperatura da parede interna T_{si} . Calor e resistência estão representados em função do fluxo de calor q'	71
Figura 7.5 – Circuito térmico considerado para cálculo da temperatura da parede direita do material A. Calor e resistência estão representados em função do fluxo de calor q'	71
Figura 7.6 – Circuito térmico considerado para cálculo da temperatura da parede direita do material B. Calor e resistência estão representados em função do fluxo de calor q'	72
Figura 7.7 – Circuitos térmicos alternativos para cálculo da temperatura da parede do material B. Calor e resistência estão representados em função do fluxo de calor q'	73
Figura 13.1–Perfil de temperatura na esfera sólida ao longo do raio	100

Lista de tabelas

Tabela 6.1 – Perfis de temperatura para $T_2 = 100[^\circ\text{C}]$ e $T_1 = 100[^\circ\text{C}]$, $T_1 = 150[^\circ\text{C}]$ e $T_1 = 200[^\circ\text{C}]$	59
--	----

Sumário

Apresentação	13
1 Introdução	15
1.1 Ementa	15
1.2 Cronograma das aulas	15
2 Energia e Calor	17
2.1 Objetivo do Capítulo	17
2.2 Transferência de Calor, Termodinâmica e Mecânica dos Fluidos	17
2.3 Energia	18
2.4 Calor	19
2.5 Temperatura e gradiente de temperatura	20
2.6 Modos de Transferência de Calor	21
2.6.1 Condução	21
2.6.2 Convecção	22
2.6.3 Radiação	22
2.7 A primeira Lei da termodinâmica para um sistema fechado: energia, calor e trabalho	22
2.7.1 Energia e calor	22
2.7.2 Energia e trabalho	23
2.7.3 A primeira lei	24
2.7.4 Primeira lei para um ciclo	26
2.7.5 Processo adiabático	26
2.8 Primeira lei da Termodinâmica para um sistema aberto	26
2.9 Calor específico	28
3 Condução	33
3.1 Objetivos do Capítulo	33
3.2 Mecanismos Físicos	33
3.2.1 Gases	33
3.2.2 Líquidos	34
3.2.3 Sólidos	34
3.3 A equação da taxa de condução	35
3.3.1 A condutividade térmica	35
3.3.2 Sólidos Metálicos x Não metálicos	35
3.3.3 Gases x Líquidos	35
3.3.4 Dependência da temperatura	35
3.4 A equação da difusão: formulação integral	35
3.5 Solução da equação da difusão de calor	37
3.6 Condições de Contorno	37
3.6.1 Temperatura especificada	38
3.6.2 Fluxo de Calor especificado	38
3.6.3 Parede isolada	38
3.6.4 Simetria	38
3.6.5 Convecção	38

3.7	Resistência Térmica	38
3.7.1	Resistência Convectiva	39
3.7.2	Resistências em série e paralelo	40
3.7.3	Resistência de Contato	41
3.8	O coeficiente global de transferência de calor U	41
4	Condução unidimensional permanente	43
4.1	Objetivos do Capítulo	43
4.2	A equação da difusão em coordenadas cartesianas	43
5	Condução unidimensional permanente	47
5.1	Objetivos do Capítulo	47
5.2	Condução em uma placa plana sem geração de calor interno	47
5.2.1	Aplicação das condições de contorno	49
5.2.2	Resistência térmica à condução	50
5.2.3	Aplicando valores	51
5.2.4	Análise da condutividade	52
6	Condução unidimensional permanente	55
6.1	Objetivos do Capítulo	55
6.2	Condução em uma placa plana com geração de calor interno	55
6.2.1	Aplicação das condições de contorno	57
6.2.2	Aplicando valores	59
6.2.3	Avaliando a condição de simetria	60
7	Condução unidimensional permanente	67
8	Condução unidimensional permanente	75
8.1	Objetivos do Capítulo	75
8.2	A equação da difusão em coordenadas cilíndricas	75
9	Condução unidimensional permanente	77
9.1	Objetivos do Capítulo	77
9.2	Condução em uma cabo sólido com geração de calor interno	77
9.2.1	Aplicação das condições de contorno	78
9.2.2	Abordagem alternativa para determinação da equação para o perfil de temperatura	80
9.2.3	Exercício 1	81
10	Condução unidimensional permanente	83
10.1	Objetivos do Capítulo	83
10.2	Casca cilíndrica	83
10.2.1	Resistência térmica à condução	86
11	Condução unidimensional permanente	87
11.1	Objetivos do Capítulo	87
11.2	Casca cilíndrica e resistência térmica	87
12	Condução unidimensional permanente	91
12.1	Objetivos do Capítulo	91
12.2	Condução em uma esfera	91
13	Condução unidimensional permanente	95
13.1	Objetivos do Capítulo	95
13.2	Condução em uma esfera sólida com geração de calor interno	95
13.2.1	Aplicação das condições de contorno	96
13.2.2	Abordagem alternativa para determinação da equação para o perfil de temperatura	98
13.2.3	Substituindo valores	99
14	Condução unidimensional permanente	101
14.1	Objetivos do Capítulo	101
14.2	Casca esférica	101

14.2.1	Aplicação das condições de contorno	102
14.2.2	Resistência térmica à condução	105

Apresentação

Esta é uma obra em desenvolvimento. Grande esforço é colocado para garantir que o texto e os cálculos estejam corretos. Sugestões são bem vindas.

Sempre utilize a versão mais recente do documento, que está disponível em:

[<www.cienciastermicas.com>](http://www.cienciastermicas.com)

Essa versão foi atualizada em: 29 de abril de 2020

Introdução

Neste curso serão apresentados os modos de *Transferência de Calor* por condução, convecção e radiação, seus princípios físicos, modelagem matemática, aplicação de condições de contorno e condições iniciais.

1.1 Ementa

- Modos de transferência
- Condução em regime permanente
- Condução em regime transiente
- Convecção
- Trocadores de Calor
- Radiação

1.2 Cronograma das aulas

- Aula 01 Apresentação da disciplina, bibliografia, avaliações. Revisão dos conceitos fundamentais
- Aula 02 Calor e energia
- Aula 03 Equação da difusão de calor e condições de contorno
- Aula 04 Aplicação da equação da difusão de calor

Transferência de calor nas ciências térmicas

2.1 Objetivo do Capítulo

- Neste capítulo serão apresentados os conceitos fundamentais para o entendimento da Transferência de Calor, sua relação com a Termodinâmica e a Mecânica dos fluidos e os modos de transferência de calor

Ao final deste capítulo, o aluno deve ser capaz de:

1. Entender as formas de energia e diferenciá-las
2. Explicar o que é calor
3. Entender os modos de transferência de calor e suas equações

2.2 Transferência de Calor, Termodinâmica e Mecânica dos Fluidos

Transferência de Calor é uma disciplina que trata dos processos de troca de calor. Calor, trabalho e energia são relacionados pela 1ª Lei da Termodinâmica.

A termodinâmica é a ciência que estuda a energia e as suas transformações. Como tal, os conceitos da termodinâmica são fundamentais para o entendimento de qualquer disciplina da área térmica.

- Termodinâmica envolve interações de calor e trabalho do sistema com o meio
- Termodinâmica não nos fornece informações sobre os mecanismos que permitem as trocas de calor nem métodos para calcular a taxa de transferência de calor

Já a mecânica de fluidos será importante no estudo das trocas de calor que envolvem o escoamento de fluidos. Conceitos importantes são:

- Camada limite térmica e fluidodinâmica

- Escoamento natural ou forçado
- Escoamento laminar ou turbulento
- Escoamento em região de entrada ou completamente desenvolvido
- Similaridade

2.3 Energia

Energia (E), em sua definição mais genérica, é a capacidade de se produzir um efeito. É uma propriedade do sistema que pode ser representada de forma extensiva, intensiva, como taxa ou como fluxo de energia:

1. Sistema

Região delimitada do espaço que será o foco de interesse.

2. Propriedade extensiva

Considera toda a massa do sistema.

Unidade no sistema internacional de unidades (S.I) é o Joule [J].

3. Propriedade intensiva

Avaliada por unidade de massa

Unidades no S.I de Joules por Kilograma $\left[\frac{J}{Kg} \right]$

4. Em função do tempo

Representada como taxa de energia

Unidades no S.I de Joules por segundo (ou Watts) $\left[\frac{J}{s} \right] = [W]$

5. Em função do tempo e da área

Representada como fluxo de energia.

Unidade no S.I é $\left[\frac{W}{m^2} \right]$

Matematicamente a energia é representada como:

$$E = U + E_K + E_P + \dots \quad (2.1)$$

Sendo:

- U : energia interna, composta por:
 - energia térmica, na forma de calor sensível e calor latente
 - energia atômica
 - energia química

- E_K : energia cinética

$$E_K = \frac{mV^2}{2}$$

- E_P : energia potencial

$$E_P = m \cdot g \cdot z$$

- Outras forma de energia, tais como elástica, acústica, etc

2.4 Calor

Calor é:

Energia térmica em trânsito devido a um gradiente de temperatura

- Energia térmica é uma das parcelas da energia interna, sendo composta por:

Calor sensível

Parcela do calor que é sentida pelo termômetro na forma de variação de temperatura

Calor latente

Parcela de calor que é absorvida ou liberada pelo sistema durante processos de mudança de fase, que ocorrem à temperatura constante. O termômetro não consegue perceber variação de temperatura, mas a quantidade de energia no sistema varia.

- Gradiente de temperatura é a variação de temperatura no espaço

É um *Vetor* que aponta na direção de maior crescimento do campo escalar.

Calor é uma *energia em trânsito*. Não se diz que um estado termodinâmico possui determinada quantidade de calor, da mesma forma como não se diz que ele possui uma determinada quantidade de trabalho. Ambos, calor e trabalho, dependem do processo, dependem da mudança de um estado termodinâmico inicial para um estado termodinâmico final.

2.5 Temperatura e gradiente de temperatura

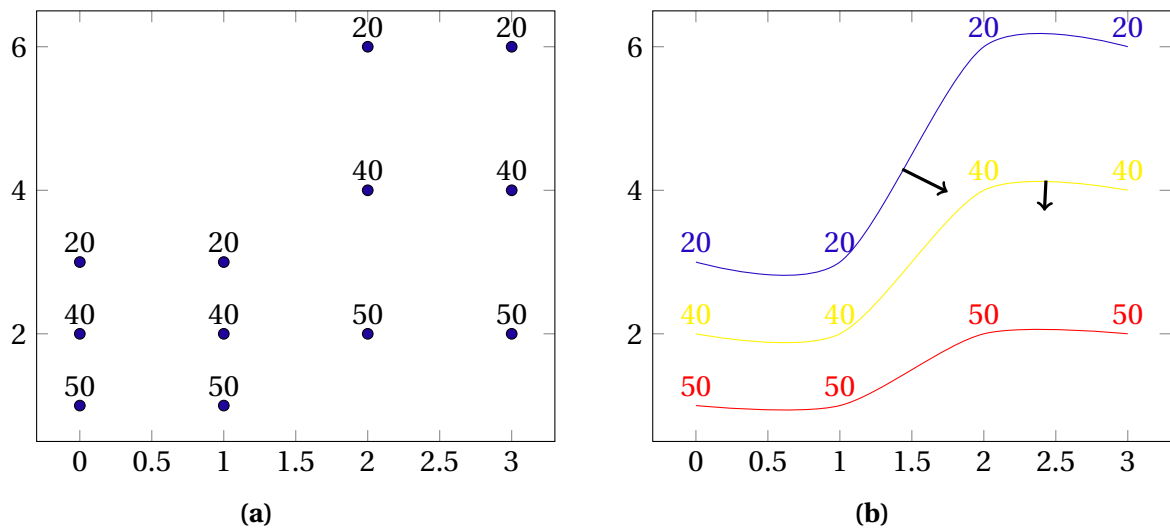


Figura 2.1 – a) Temperatura é um campo escalar: possui valor em determinada coordenada espacial; b) Isotermas (curvas de igual temperatura) e vetor gradiente apresentado em dois pontos (com direção normal à isoterma no ponto e sentido de crescimento do campo escalar)

A temperatura é uma medida do grau de agitação molecular. É um campo escalar, ou seja, possui valor em determinado ponto espacial, em determinado instante. Como todo escalar, possui módulo, mas não possui direção nem sentido. Como exemplo, a Fig.2.1(a) apresenta valores de temperatura em uma placa plana.

Com os valores de temperatura determinados no sistema em determinado instante, é possível traçar as curvas isotérmicas, ou seja, curvas que apresentam o mesmo valor de temperatura, conforme apresentado na Fig.2.1(b)

O gradiente da temperatura, por sua vez, é um vetor que aponta na direção de maior crescimento do campo escalar em cada ponto. Considerando as linhas isotérmicas na Fig.2.1(b)), o vetor gradiente em cada ponto terá direção normal à linha isotérmica, com sentido da menor temperatura para a maior temperatura. A Fig.2.1(b) apresenta o gradiente em dois pontos do campo escalar.

O símbolo matemático para o gradiente é o operador "Del". Del é um operador representado pela letra Nabla e símbolo ∇ , podendo ser aplicado sobre um escalar ou sobre um vetor (como produto escalar de dois vetores ou como produto vetorial de dois vetores). Como qualquer operador, tal como soma, subtração, multiplicação e divisão, Del opera sobre a variável em que é aplicado.

- O operador del aplicado sobre um escalar é chamado de Gradiente, e resulta em um campo vetorial.

Seja T a temperatura em um campo escalar (x, y, z) . O valor da temperatura depende da posição espacial: $T = T(x, y, z)$. Em coordenadas cartesianas o operador

gradiente será um vetor com componentes:

$$\text{grad}[T_{(x,y,z)}] = \nabla T_{(x,y,z)} = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \quad (2.2)$$

- O operador Del aplicado como produto escalar em um vetor é chamado de Divergente, e resulta em um campo escalar.

Seja o vetor $\vec{A} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$. O operador Del aplicado como produto escalar sobre o vetor resulta no divergente, que é a soma das derivadas parciais de suas componentes vetoriais:

$$\text{Div}(\vec{A}) = \nabla \vec{A} = \nabla(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (2.3)$$

Aplicando o Divergente sobre o Gradiente da temperatura, temos:

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla T) &= \nabla \left(\frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ \nabla^2 T &= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

- O operador Del aplicado como produto vetorial em um vetor é chamado de rotacional, e resulta em um campo vetorial.

Seja o vetor $\vec{A} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$. O operador Del aplicado como produto vetorial sobre o vetor resulta no rotacional, que é ao determinante da matriz:

$$\text{rot}(\vec{A}) = \nabla \times \vec{A} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

2.6 Modos de Transferência de Calor

2.6.1 Condução

- Ocorre em sólidos.
- Ocorre em fluidos estagnados
- Ocorre devido a uma diferença de temperatura

2.6.2 Convecção

- Ocorre em fluidos em movimento
- Depende do movimento macroscópico da massa de fluido no espaço

2.6.3 Radiação

- Corpos emitem e absorvem radiação

Todo corpo à temperatura maior do que zero absoluto emite radiação

- Não depende de meio sólido
- Para um corpo, queremos o balanço entre a energia irradiada e a absorvida

Emissividade ϵ

Absortividade G

2.7 A primeira Lei da termodinâmica para um sistema fechado: energia, calor e trabalho

Energia, calor e trabalho são relacionados pela primeira lei da termodinâmica, que evoluiu da *Equivalência mecânica do calor*, proposto por Rumford e dos trabalhos experimentais de Joule.

Joule realizou experimentos em processos de um estado inicial a um final envolvendo vários tipos diferentes de trabalho, tais como trabalho elétrico e trabalho mecânico, em diferentes arranjos e em vários sistemas, compreendendo diversas substâncias puras, misturas e substâncias passando por reações químicas.

A Primeira Lei da Termodinâmica é um resultado empírico, confirmado por experiências práticas e de laboratório.

2.7.1 Energia e calor

Imagine um sistema fechado que recebe calor do ambiente. A temperatura do sistema irá aumentar ao longo do tempo, de um estado inicial para um estado final.

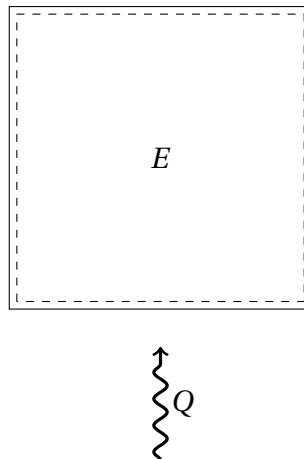


Figura 2.2 – Um sistema fechado recebendo calor de uma fonte externa sofrerá aumento de sua energia E e consequentemente aumento de sua temperatura

A quantidade total de calor adicionado ao sistema depende somente dos estados inicial e final do processo, e não dos estados intermediários. Pode-se, portanto, definir uma nova propriedade ou função de estado, cujo acréscimo representa o calor recebido pelo sistema no processo. Esta propriedade é chamada de energia interna do sistema U . Por ser uma variável de estado, sua variação é uma diferencial exata, representada por du .

Assumindo que para o dado sistema um valor arbitrário de U é definido para um estado de referência, valores correspondentes de U para todos os outros estados podem ser encontrados pela medição do calor nos processos.

$$dU = \delta Q \quad (2.6)$$

Trata-se de um calor adicionado da vizinhança ao sistema, que resulta num aumento da energia interna do sistema

2.7.2 Energia e trabalho

O experimento clássico de Joule envolvendo trabalho e variação de energia consistiu na medição da variação de temperatura em um aparato com uma pá imersa no interior do sistema isolado do meio (de forma a não trocar calor), acionada pela queda de dois pesos de uma altura especificada (realização de trabalho).

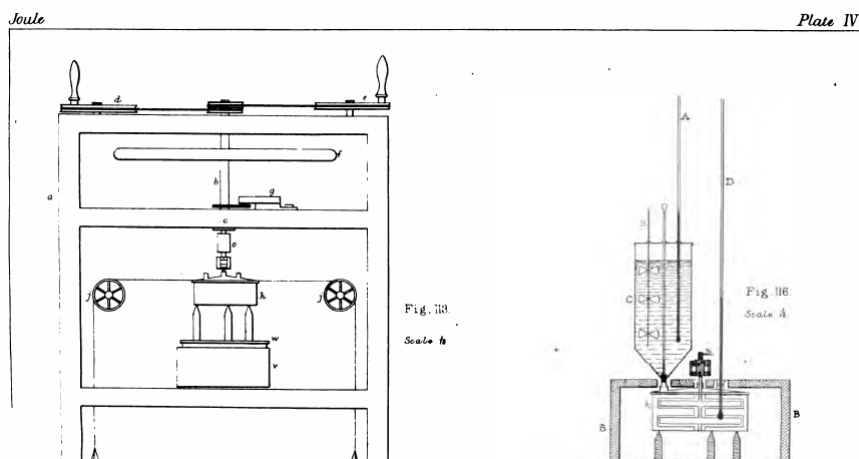


Figura 2.3 – Um sistema fechado recebendo trabalho de uma fonte externa sofrerá aumento de sua energia E e consequentemente aumento de sua temperatura. New determination of the mechanical equivalent of heat, 1878

O experimento requereu termômetros bastante precisos, desenvolvidos por Joule em função de sua experiência com a fabricação de cervejas.

As medições mostraram que, para uma dada quantidade de trabalho realizado, ocorria uma determinada variação de temperatura no sistema. Da mesma forma que na adição de calor, a mudança de estado é representada pelo acréscimo na função de estado energia interna, que depende apenas dos estados inicial e final do processo (logo, é uma diferencial exata):

$$dU = \delta W \quad (2.7)$$

Trata-se de um trabalho realizado da vizinhança no sistema, resultando num aumento da energia interna do sistema

2.7.3 A primeira lei

O calor adicionado ao sistema e o trabalho realizado no sistema pela vizinhança causam uma mudança de energia dU .

U é uma propriedade de estado e sua variação dU é uma diferencial exata, ou seja, depende apenas dos estados inicial e final do sistema. Para esta variação de energia dU , entretanto, existe uma quantidade infinita de formas, ou processos, pelas quais calor pode ser adicionado ao sistema e trabalho pode ser realizado sobre o sistema. Assim, tanto calor quanto trabalho são diferenciais inexatas, representadas por δ .

A formulação matemática da primeira lei se deve, entre outros, a Thomsom e a Clausius. Sua forma é:

$$dU = \delta Q + \delta W \quad (2.8)$$

sendo:

- dU : variação da energia interna do sistema

- δQ : quantidade de calor adicionado da vizinhança ao sistema
- δW : quantidade de trabalho realizado pela vizinhança no sistema

Na Eq. 2.8, podemos observar que:

- Calor adicionado da vizinhança ao sistema aumenta a energia do sistema
se um sistema recebe calor da vizinhança, sua energia específica no final do processo (u_2) é maior do que sua energia específica no início do processo (u_1). Ou seja, a energia interna do sistema é proporcional ao calor adicionado ao sistema pela vizinhança. Aqui, é importante termos bastante atenção. O calor adicionado pela vizinhança sobre o sistema é um calor positivo, e leva a um aumento da energia interna do sistema.
- Calor realizado pelo sistema na vizinhança diminui a energia do sistema
- Trabalho realizado pela vizinhança no sistema aumenta a energia do sistema
se um sistema recebe trabalho da vizinhança, sua energia específica no final do processo (u_2) é maior do que sua energia específica no início do processo (u_1). A energia interna do sistema também é proporcional ao trabalho realizado no sistema pela vizinhança. É muito importante compreendermos bem de onde e para onde vai o trabalho. O trabalho realizado pela vizinhança sobre o sistema é um trabalho positivo e, de maneira semelhante ao calor, resulta num aumento da energia interna do sistema.
- Trabalho realizado pelo sistema na vizinhança diminui a energia do sistema

A eq. 2.8 representa matematicamente a primeira lei da termodinâmica.

Clausius, em seu trabalho, formulou a primeira lei como:

$$dU = \delta Q - \delta W \quad (2.9)$$

O foco de Clausius era o trabalho realizado por uma máquina térmica. Desta forma, por convenção, o trabalho realizado pelo sistema (máquina) na vizinhança é um trabalho positivo. Como, para realizar trabalho, o sistema deve gastar energia (sua energia final será menor do que sua energia inicial), há a necessidade do sinal negativo.

Na formulação anterior, foi considerado apenas a variação da energia interna U do sistema. De forma mais ampla, podemos considerar que a realização de trabalho e a adição de calor também podem levar a uma mudança da energia cinética do sistema E_K ou a uma mudança da energia potencial do sistema E_P . Logo:

$$dE = dU + dE_K + dE_P + \dots \quad (2.10)$$

A variação de energia total do sistema pode ocorrer devido à variação da energia interna, cinética, potencial ou outras formas de energia. Considerando a variação dessas outras parcelas de energia (em especial cinética e potencial), a primeira lei pode ser escrita como:

$$dE = \delta Q + \delta W \quad (2.11)$$

A primeira lei também pode ser representada em termos das taxas:

$$\frac{dE}{dt} = \delta\dot{Q} + \delta\dot{W} \quad (2.12)$$

- $\frac{dE}{dt}$: taxa de variação de energia do sistema $[J/s] = [W]$;
- $\delta\dot{Q}$: taxa de calor adicionado da vizinhança ao sistema $[W]$
- $\delta\dot{W}$: taxa de trabalho realizado pela vizinhança no sistema $[W]$

2.7.4 Primeira lei para um ciclo

Ciclo é um processo cujo estado final é igual ao inicial. Como E é uma propriedade, a variação líquida de E para um ciclo é nula. Logo:

$$\oint \delta Q + \oint \delta W = 0 \quad (2.13)$$

Ou

$$|\oint \delta Q| = |\oint \delta W| \quad (2.14)$$

Algebricamente, o calor líquido recebido pelo sistema durante um ciclo é igual ao trabalho líquido realizado pelo sistema durante o ciclo.

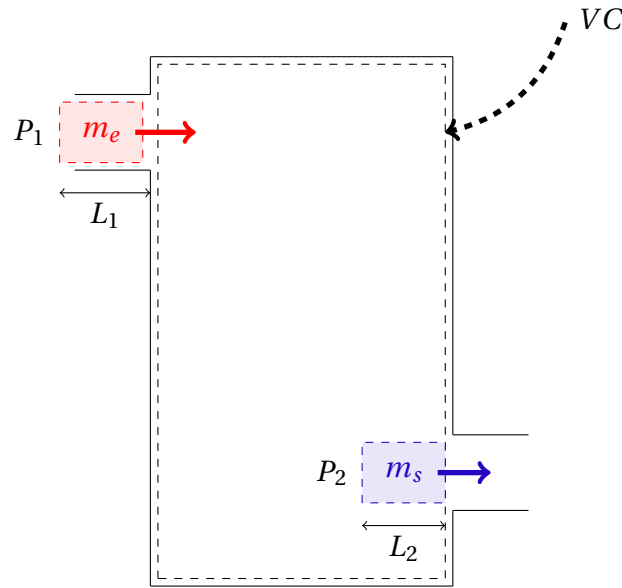
2.7.5 Processo adiabático

Se isolantes forem colocados entre o sistema e sua vizinhança, que estão a temperaturas diferentes, o calor Q se torna pequeno. Se o isolante for muito efetivo, Q se torna muito pequeno. Pode-se extrapolar para a condição em que o calor é nulo. Tal processo é denominado *adiabático*.

Processos a iguais temperaturas também são adiabáticos, pois não há gradiente de temperatura e portanto $Q = 0$.

2.8 Primeira lei da Termodinâmica para um sistema aberto

Vamos expandir a primeira lei para um sistema fechado, de forma que ela também possa representar sistemas abertos, que possuem massa entrando ou saindo do sistema (ou volume de controle).



Para estes casos, temos que considerar o trabalho realizado pela vizinhança sobre o sistema para colocar uma determinada quantidade de massa no interior do volume de controle (m_e), e o trabalho realizado pelo sistema na vizinhança para remover uma determinada quantidade de massa do volume de controle (m_s).

O trabalho para colocar a massa da vizinhança no interior do volume de controle representa um termo de trabalho positivo, ou seja, trabalho realizado pela vizinhança sobre o sistema, e resulta num aumento da energia do sistema. Imaginemos uma força aplicada para deslocar uma determinada quantidade de volume por uma distância L . Assim:

$$W = \vec{F}_1 \cdot \vec{L}_1 \quad (2.15)$$

Podemos representar o termo de força em função da pressão exercida na região de entrada (P_1) sobre a área da seção transversal A_1 : $\vec{F}_1 = P_1 \cdot \vec{A}_1$. Desta forma, a equação 2.15 pode ser escrita como:

$$W_1 = (P_1 \cdot \vec{A}_1) \cdot L_1 \quad (2.16)$$

O produto da área por uma distância nos fornece o volume, logo:

$$\begin{aligned} W_1 &= (P_1 \cdot \vec{A}_1) \cdot L_1 \\ \vec{A}_1 \cdot L_1 &= V_1 \\ W_1 &= P_1 \cdot V_1 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Adotando o mesmo procedimento, podemos obter o trabalho *realizado pelo sistema na vizinhança* para remover uma determinada quantidade de massa do sistema. Neste caso, o trabalho é negativo (o sistema gasta energia para realizar esse trabalho sobre a vizinhança).

$$W_2 = -P_2 \cdot V_2 \quad (2.18)$$

Os trabalhos apresentados nas Eqs. 2.17 e 2.18 são denominados trabalhos de fluxo. Acrescentando esses termos de trabalho, a primeira lei da termodinâmica para um sistema aberto pode ser escrita como:

$$dE = \delta Q + \delta W + P_1.V_1 - P_2.V_2 \quad (2.19)$$

Passando os termos de trabalho de fluxo para o lado esquerdo:

$$dE + P_2.V_2 - P_1.V_1 = \delta Q + \delta W \quad (2.20)$$

Considerando que a energia total E é composta pelos termos de energia interna, cinética e potencial:

$$dU + dE_K + dE_P + P_2.V_2 - P_1.V_1 = \delta Q + \delta W \quad (2.21)$$

reagrupando os termos:

$$U_2 + P_2.V_2 - U_1 - P_1.V_1 + dE_K + dE_P = \delta Q + \delta W \quad (2.22)$$

O termo $U + P.V$ aparece frequentemente nos cálculos termodinâmicos, e por isso recebe uma denominação especial. Ele é *definido* como a entalpia (H) do sistema. Como ele é resultante da combinação de propriedades de estado, ele também é uma propriedade de estado.

$$H \equiv U + PV \quad (2.23)$$

A primeira lei da termodinâmica para sistema aberto pode ser escrita em função da variação da entalpia:

$$dH + dE_K + dE_P = \delta Q + \delta W \quad (2.24)$$

Na eq. 2.24, o lado esquerdo continua representando a variação de energia do sistema, enquanto o lado direito representa o calor recebido pelo sistema da vizinhança e o trabalho realizado pela vizinhança sobre o sistema. Desta forma, a representação $dE = \delta Q + \delta W$ continua válida.

2.9 Calor específico

A teoria do calor específico determina que a razão entre a quantidade de calor fornecida ao sistema e a variação de temperatura devido a esse calor é dada por uma constante, o poder calorífico C , específica da substância que se está avaliando. Por unidade de massa, têm-se o calor específico c da substância.

$$C = \frac{\delta Q}{\Delta T} \quad (2.25)$$

sendo $C = m.c$:

- C : poder calorífico

- m : massa
- c : calor específico

A primeira lei da termodinâmica, proveniente da teoria da equivalência mecânica do calor, propõe que calor e trabalho são intercambiáveis, sendo processos que alteram o estado termodinâmico da matéria, representada por sua energia E .

$$dE = \delta Q + \delta W \quad (2.26)$$

Surge, portanto, a questão: como compatibilizar o calor específico com a teoria da equivalência mecânica do calor, e em consequência, com a primeira lei da termodinâmica? O que representa o calor específico?

Para responder à esse questionamento, vamos considerar dois sistemas sendo aquecidos: o primeiro, com paredes rígidas, sofrerá um processo a volume constante; o segundo, composto por um sistema pistão-cilindro que pode se mover, sofrerá um processo à pressão constante. Para ambos os processos, temos que a relação entre a quantidade de calor fornecida e a variação de temperatura do sistema é dada por:

$$\delta Q = C \cdot \Delta T \quad (2.27)$$

Pela primeira lei da termodinâmica, temos:

- Processo à volume constante

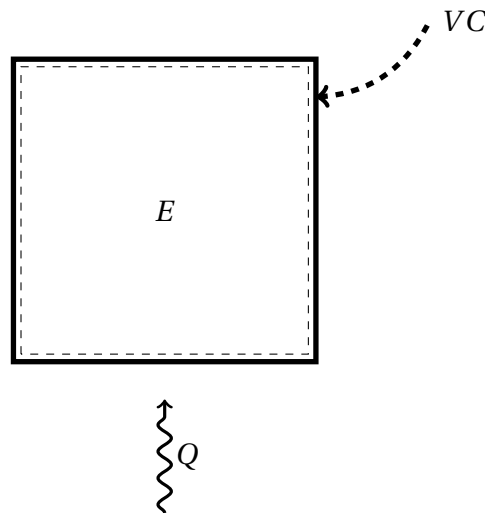


Figura 2.4 – Um sistema fechado com paredes rígidas recebendo calor de uma fonte externa à volume constante sofrerá aumento de sua energia $dE = m \cdot c \cdot \Delta T$

$$dE = \delta Q + \delta W$$

Como o sistema não realiza trabalho:

$$\begin{aligned} dE &= \delta Q \\ dU + dE_K + dE_P &= \delta Q \end{aligned}$$

Desprezando os termos de energia cinética e potencial: $dE = dU$. Logo:

$$dU = \delta Q$$

Substituindo a Eq.2.27:

$$dU = C.\Delta T$$

Escrevendo em propriedades intensivas:

$$m.du = m.c.dT$$

$$c = \frac{du}{dT}$$

Como este é um processo à volume constante, representa-se o calor específico com o subíndice v:

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \quad (2.28)$$

- Processo à pressão constante

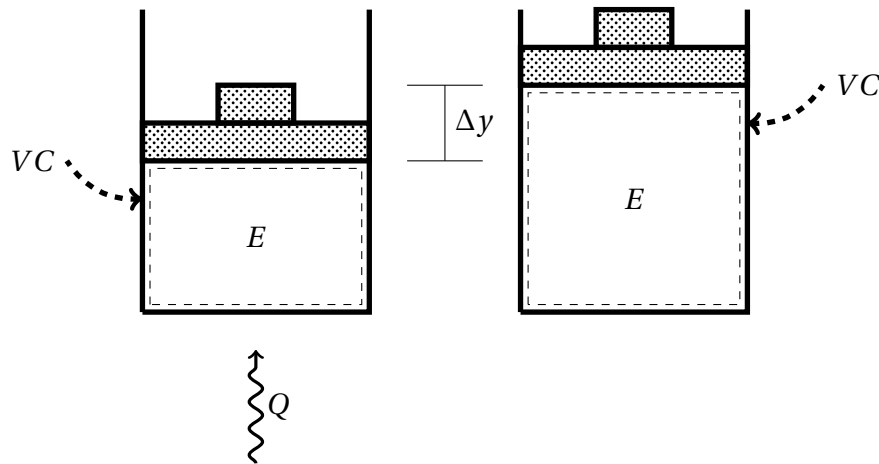


Figura 2.5 – Um sistema fechado do tipo pistão-cilindro recebe calor de uma fonte externa à pressão constante sofrerá aumento de sua energia $dE = m.c.\Delta T$

Neste caso, pela primeira lei, desprezando os termos de energia cinética e potencial, temos um trabalho de expansão ($W_E = -P.dV$). Assim:

$$\begin{aligned} dU &= \delta Q + \delta W \\ dU &= \delta Q - P.dV \\ dU + P.dV &= \delta Q \end{aligned} \quad (2.29)$$

Da definição da entalpia: $H = U + P.V$, e como a pressão é constante:

$$dH = \delta Q \quad (2.30)$$

Substituindo na Eq.2.27:

$$\begin{aligned} dH &= C.\Delta T \\ m.dh &= m.c.\Delta T \\ c &= \frac{dh}{dT} \end{aligned} \quad (2.31)$$

De maneira semelhante ao processo a volume constante, indicamos que o processo é à pressão constante pelo subíndice P. Logo:

$$c_P = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P \quad (2.32)$$

Condução

3.1 Objetivos do Capítulo

- Neste capítulo serão apresentados os mecanismos físicos que envolvem a transferência de calor por condução e o seu equacionamento

Ao final deste capítulo, o aluno deve ser capaz de:

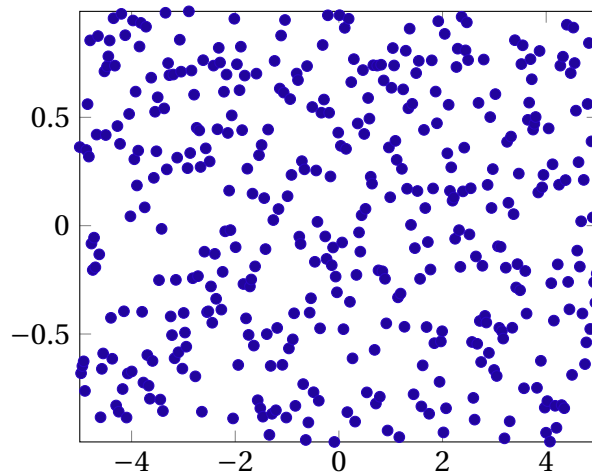
1. Explicar os mecanismos físicos relacionados à transferência de calor por condução
2. Determinar quais propriedades representam a condução
3. Equação da condução
4. Determinar condições de contorno apropriadas

3.2 Mecanismos Físicos

Transferência de calor devido a interações atômicas e moleculares.

3.2.1 Gases

- Colisões moleculares são responsáveis pela troca de energia



- Gases: baixa interação molecular

Caracterização de gás (ideal): forças intermoleculares desprezíveis, devido à grande distância intermolecular (grande caminho livre médio)

Energia em átomos e moléculas é determinada pela teoria cinética dos gases, podendo ser:

- De translação
Devido ao seu movimento espacial
- de rotação
- Vibração

3.2.2 Líquidos

Semelhante aos gases, mas com menores distâncias moleculares, o que ocasiona maior número de colisões moleculares

3.2.3 Sólidos

Em sólidos as moléculas estão em padrão mais regular do que em líquidos e gases. Além disso, estão fixas no espaço. Há duas formas de troca de energia:

- Vibração de lattice
Vibração entre moléculas
- Movimento de elétrons
Leva ao conceito de bom e mau condutor de calor, em similaridade à eletricidade
Não condutores: transferem energia apenas pela vibração de lattice
Bons condutores transferem tanto por vibração quanto por movimento de elétrons.
Bons condutores elétricos geralmente bons condutores de calor

Gráfico de Condução Térmica x Elétrica

3.3 A equação da taxa de condução

A equação da taxa de calor, ou equação de Fourier, foi desenvolvida com base em observações experimentais:

$$\vec{q} = -K.A.\nabla T \quad (3.1)$$

Sendo:

- q : taxa de calor [W]
- K : condutividade térmica do meio [$\frac{W}{m.K}$]
- A : área da seção transversal [m^2]
- T : temperatura [K]

Em 1-dimensão:

$$\vec{q} = -K.A.\frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.2)$$

3.3.1 A condutividade térmica

A condutividade térmica é uma propriedade do material ou meio, e tem valores tabelados.

gases < líquidos < sólidos

- Bons materiais condutores elétricos geralmente são bons condutores térmicos.
- Material Isotrópico
propriedades idênticas em todas as direções
- Material Anisotrópico
Propriedades dependem da direção

Valores de condutividade variam entre $10^{-2} < K < 10^3$.

3.3.2 Sólidos Metálicos x Não metálicos

3.3.3 Gases x Líquidos

3.3.4 Dependência da temperatura

3.4 A equação da difusão: formulação integral

- Balanço de energia
Acumulação (I) = Condução (II) + Geração (III)

A energia acumulada (I) no sistema devido à uma variação de temperatura pode ser determinada por:

$$\begin{aligned}
 U &= m.c(T - T_{ref}) \\
 m &= \rho.V \\
 dm &= \rho.dV \\
 U &= \int_V \rho.c.(T - T_{ref}).dV
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Representando em termos de taxas:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial t} &= \int_V \rho.c. \frac{(T - T_{ref})}{dt}.dV \\
 \frac{\partial U}{\partial t} &= \int_V \rho.c. \frac{\partial T}{\partial t}.dV
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

O segundo termo, a condução de calor, é um vetor que depende do gradiente da temperatura. Somando em toda a área do corpo:

$$\vec{q} = \int_A -K \vec{dA} \nabla T \tag{3.5}$$

Sendo:

- $\vec{dA}$: vetor área, que representa a área da seção transversal com vetor unitário $\vec{n}$ perpendicular a área e apontando para fora do sistema.
- $\vec{dA} \cdot \nabla T$: produto escalar do vetor área pelo gradiente da temperatura
Terá valor positivo se os dois vetores tiverem a mesma direção e sentido, o que indica que o calor está saindo do sistema

Do teorema da divergência, a integral de área pode ser representada por uma integral de volume:

$$\int_A K \cdot \vec{dA} \cdot \nabla T = \int_V \nabla \cdot (K \cdot \nabla T) \cdot dV \tag{3.6}$$

Leia-se: a integral de área de K vezes o vetor área produto escalar gradiente de T é igual à integral de volume do divergente de K gradiente de T.

O termo de geração representa uma quantidade de calor gerada por unidade de volume:

$$\int_V \dot{q} dV \tag{3.7}$$

Assim:

$$\int_V \rho.c. \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dV = \int_V \nabla \cdot (K \cdot \nabla T) \cdot dV + \int_V \dot{q} dV \tag{3.8}$$

Como o volume de controle é arbitrário, temos:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (K \cdot \nabla T) + \dot{q} \quad (3.9)$$

A Eq. 3.9 representa a equação da difusão de calor vetorialmente, independente do sistema de coordenadas. Sua resolução depende do sistema de coordenadas adotado, das condições de contorno e das condições iniciais para os casos transitentes.

- Sistema de Coordenadas Retangular

$$T=T(x,y,z)$$

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} \quad (3.10)$$

- Sistema de Coordenadas Cilindricas

$$T=T(r,\theta,z)$$

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(K_r \cdot r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(K_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} \quad (3.11)$$

- Sistema de Coordenadas Esféricas

$$T=T(r,\theta,\phi)$$

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(K_r r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(K_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(K_\phi \sin \phi \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \dot{q} \quad (3.12)$$

3.5 Solução da equação da difusão de calor

Para resolver a equação da difusão, que é uma equação diferencial parcial, são necessárias condições iniciais (para os casos transientes - variáveis com o tempo) e condições de contorno apropriadas. De fato, são as condições iniciais e as condições de contorno que diferenciam um problema de outro.

Primeiramente o perfil de temperatura em função da posição espacial é obtido. Caso se deseje a taxa de calor (ou fluxo de calor), deriva-se a equação para a temperatura para ser aplicada na equação de Fourier.

3.6 Condições de Contorno

São as condições de contorno que tornam possível a aplicação da equação da difusão para cada caso particular, permitindo que se encontre a equação para o perfil de temperatura apropriado no espaço.

Esta é, geralmente, a parte mais difícil na solução de problemas de condução, pois sua correta aplicação depende do entendimento correto da física do problema.

Um aspecto importante é não introduzir informações não acessíveis nas condições de contorno. É importante que a condição de contorno escolhida tenha um valor numérico acessível para que possa ser utilizado na solução.

São vários tipos de condições de contorno que podem ser aplicadas.

3.6.1 Temperatura especificada

A condição de temperatura especificada indica que, em determinada localização espacial, o valor da temperatura é determinado.

$$T_{(x)} = T_S \quad (3.13)$$

3.6.2 Fluxo de Calor especificado

Em determinada região pode haver um fluxo de calor especificado.

$$q_x = -k.A. \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L} \quad (3.14)$$

3.6.3 Parede isolada

Se a parede é isolada ela não troca calor com o meio.

$$0 = -k.A. \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=-L} \quad (3.15)$$

3.6.4 Simetria

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = 0 \quad (3.16)$$

3.6.5 Convecção

Pela 1ª Lei da termodinâmica (conservação de energia):

$$-K \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L} = h(T_S - T_\infty) \quad (3.17)$$

3.7 Resistência Térmica

Uma analogia importante da lei de Fourier é com a lei de Ohm. Tal analogia nos fornece uma boa orientação na solução de problemas de transferência de calor.

Da lei de Ohm, temos:

$$\Delta U = R.I \quad (3.18)$$

sendo:

- ΔU : diferença de voltagem, em Volts [V]

- R : resistência elétrica, em Ohms $[\Omega]$
- I : corrente elétrica, em Ampéres $[A]$

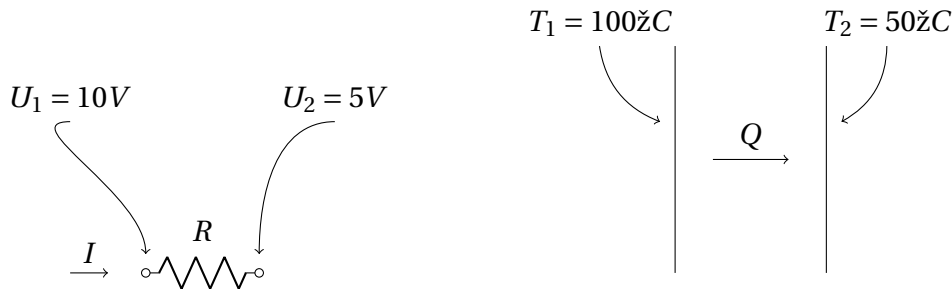


Figura 3.1 – Da mesma forma que uma diferença de potencial ΔU induz a passagem de uma corrente elétrica I através da resistência elétrica R , a diferença de temperatura ΔT induz a passagem de calor Q através do meio com resistência térmica R_T .

A diferença de voltagem $\Delta U = U_1 - U_2$ é a responsável por produzir uma corrente I , que "escoa" pela resistência elétrica. Para transferência de calor, por analogia:

- $U \equiv dT$: a diferença de temperatura irá gerar um fluxo de calor. É o que "dirige" o escoamento. Sem essa diferença não há transferência de calor
- $I \equiv q$: calor é o que flui devido à diferença de temperatura
- R_T : resistência térmica

Assim:

$$q = \frac{\Delta T}{R_T} \quad (3.19)$$

Da Eq. 3.19, a resistência térmica R_T possui dimensões de $[\frac{K}{W}]$

3.7.1 Resistência Convectiva

Considere uma parede com temperatura $T = T_s$, sujeita a uma taxa de calor q e exposta a um ambiente externo à T_∞ e coeficiente de convecção h_∞ , conforme Fig.3.2.

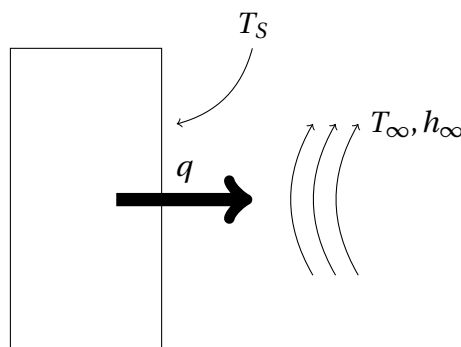


Figura 3.2 – Parede com superfície à temperatura T_s exposta a convecção com o meio.

Pela lei de resfriamento de Newton, ou equação da convecção:

$$q = h.A.(T_S - T_\infty) \quad (3.20)$$

Representando na forma de resistência térmica:

$$q = \frac{(T_S - T_\infty)}{\frac{1}{h.A}} = \frac{(T_S - T_\infty)}{R_T} \quad (3.21)$$

Logo, a resistência térmica à convecção é:

$$R_T = \frac{1}{h.A} \quad (3.22)$$

3.7.2 Resistências em série e paralelo

Da mesma forma que as resistências elétricas, as resistências térmicas podem ser acopladas em série e em paralelo.

Considere uma parede A (com espessura L_A e resistência térmica R_A), em contato com a parede B (com espessura L_B e resistência térmica R_B), que por sua vez está em contato com a parede C (com espessura L_C e resistência térmica R_C), que por sua vez está em contato com ar externo à temperatura T_∞ e coeficiente de convecção h_∞ . O sistema pode ser representado por nós e resistências. A resistência equivalente é:

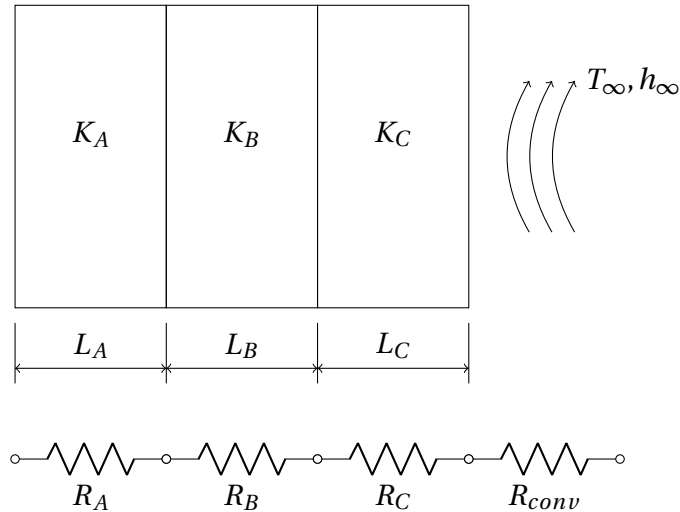


Figura 3.3 – Resistência térmica em série

$$R_{equiv} = R_A + R_B + R_C + R_{conv} \quad (3.23)$$

Considere a parede A em contato com as paredes B e C dispostas em paralelo, com transferência de calor unidimensional na direção x, conforme Fig3.4:

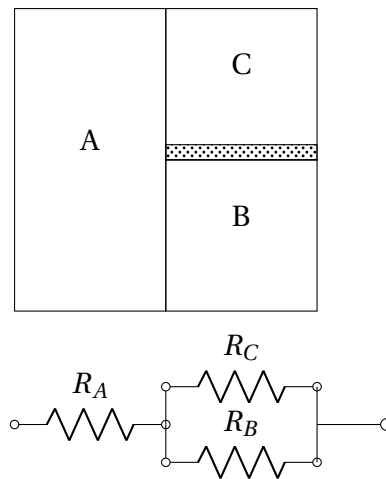


Figura 3.4 – As Paredes B e C podem ser representadas por resistências térmicas dispostas em paralelo.

Para as resistências em paralelo B e C, têm-se a resistência equivalente:

$$\frac{1}{R_{equiv}} = \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} \quad (3.24)$$

3.7.3 Resistência de Contato

O contato entre dois corpos não é perfeito, devido à rugosidade do material. Dessa forma, há uma resistência de contato. Valores típicos de resistência de contato são apresentados na tabela.

3.8 O coeficiente global de transferência de calor U

Condução unidimensional permanente em coordenadas cartesianas

4.1 Objetivos do Capítulo

- Neste capítulo a equação da difusão será aplicada para problemas de transferência de calor unidimensional em regime permanente

Ao final deste capítulo, o aluno deve ser capaz de:

1. Aplicar a equação da difusão nas coordenadas adequadas
2. Avaliar as hipóteses da modelagem de problemas de condução unidimensional
3. Avaliar os diversos tipos de condição de contorno e seu impacto no perfil de temperatura

4.2 A equação da difusão em coordenadas cartesianas

Inicialmente, vamos avaliar a equação da difusão em coordenadas cartesianas, unidimensional e em regime permanente. Em seguida faremos as integrações apropriadas e avaliaremos como determinar as constantes de integração, com a aplicação das condições de contorno.

De fato, o que diferencia os problemas de transferência de calor, além das coordenadas adotadas, são as hipóteses de modelagem e as condições de contorno.

A equação da difusão de calor é:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (K \cdot \nabla T) + \dot{q} \quad (4.1)$$

Em coordenadas cartesianas:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} \quad (4.2)$$

Vamos adotar as seguintes hipóteses para a modelagem:

1. Regime permanente

Implica que todas as derivadas temporais são nulas: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

2. Unidimensional na coordenada x

3. Propriedades constantes

K pode ser retirado da derivada

Aplicando as hipóteses na equação da difusão em coordenadas cartesianas, e como $T = T(x)$ somente, a equação se transforma na equação ordinária:

$$0 = \frac{d}{dx} \left(K \frac{dT}{dx} \right) + \dot{q} \quad (4.3)$$

Adotando K constante:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) &= -\frac{\dot{q}}{K} \\ \frac{d^2 T}{dx^2} &= -\frac{\dot{q}}{K} \end{aligned} \quad (4.4)$$

A Eq. 4.4 é a equação da difusão 1-D em regime permanente com geração de calor interno $\dot{q}$.

Para a integração da equação, vamos utilizar o segundo teorema fundamental do cálculo, ou *Regra de Barrow*, que especifica que a integral da derivada de f é f :

$$\int_a^b \frac{df}{dx} = f(b) - f(a) \quad (4.5)$$

Fazendo a primeira integração em relação à coordenada x, com $f = \frac{dT}{dx}$:

$$\begin{aligned} \int_x \frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) &= \int_x -\frac{\dot{q}}{K} \\ \frac{dT}{dx} &= -\frac{\dot{q}}{K} \cdot x + C_1 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Fazendo a segunda integração em relação à coordenada x:

$$\begin{aligned} \int_x \frac{dT}{dx} &= \int_x \left(-\frac{\dot{q}}{K} \cdot x + C_1 \right) \\ T(x) &= -\frac{\dot{q}}{2K} x^2 + C_1 \cdot x + C_2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

As constantes de integração C_1 e C_2 na equação do perfil de temperatura são determinadas com a aplicação das condições de contorno apropriadas. São elas que irão diferenciar o resultado de problemas particulares.

Da análise da Eq. 4.7, chegamos às seguintes conclusões:

1. Quando houver geração de calor $\dot{q}$, o perfil de temperaturas será parabólico, com concavidade para baixo
2. Quando não houver geração de calor interno, o perfil de temperatura será linear.

A solução de problemas particulares, com a correta aplicação das condições de contorno, será realizada nos capítulos subsequentes.

Condução unidimensional permanente em coordenadas cartesianas sem geração de calor em uma placa plana com temperaturas conhecidas

5.1 Objetivos do Capítulo

- Neste capítulo a equação da difusão será aplicada para problemas de transferência de calor unidimensional em regime permanente

Ao final deste capítulo, o aluno deve ser capaz de:

1. Aplicar a equação da difusão nas coordenadas adequadas
2. Aplicar as condições de contorno apropriadas
3. Desenvolver a equação algébrica à partir das condições de contorno, para coordenadas cartesianas.
4. Determinar as resistências térmicas para o sistema de coordenadas adotado.

5.2 Condução em uma placa plana sem geração de calor interno

Considere a transferência de calor unidimensional em regime permanente, sem geração de calor interno, numa placa plana de espessura L e condutividade térmica K com temperaturas das superfícies conhecidas T_1 e T_2 ($T_1 > T_2$), respectivamente, conforme Fig. 5.1:

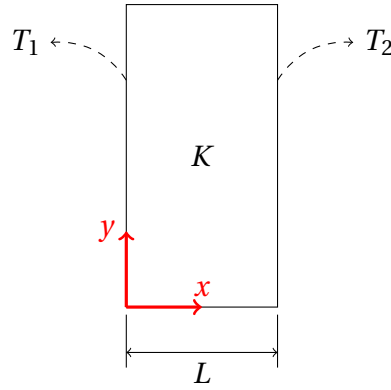


Figura 5.1 – Placa plana sem geração de calor e temperaturas conhecidas nas paredes

Da equação da difusão de calor:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (K \cdot \nabla T) + \dot{q} \quad (5.1)$$

Em coordenadas cartesianas:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} \quad (5.2)$$

Adotando as hipóteses simplificadores:

1. Regime permanente

Todas as derivadas temporais são nulas: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

2. Unidimensional na coordenada x

3. Propriedades constantes

K pode ser retirado da derivada

4. Sem geração de calor interno: $\dot{q} = 0$

Vamos aplicar essa condição após as duas integrações para manter a generalidade.

Como $T = T(x)$ somente, a equação da difusão se transforma na equação ordinária:

$$0 = \frac{d}{dx} \left(K \frac{dT}{dx} \right) + \dot{q} \quad (5.3)$$

Adotando K constante:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{\dot{q}}{K} \quad (5.4)$$

A Eq. 5.4 é a equação da difusão 1-D em regime permanente com geração de calor interno $\dot{q}$. Apesar do problema em análise não ter geração de calor, vamos realizar

a integração da forma mais genérica para depois aplicar as condições de contorno apropriadas e determinar as constantes de integração.

Para a integração da equação, vamos utilizar o segundo teorema fundamental do cálculo, ou *Regra de Barrow*, que especifica que a integral da derivada de f é f :

$$\int_a^b \frac{df}{dx} = f(b) - f(a) \quad (5.5)$$

Fazendo a primeira integração em relação à coordenada x , com $f = \frac{dT}{dx}$:

$$\begin{aligned} \int_x \frac{d^2T}{dx^2} &= \int_x -\frac{\dot{q}}{K} \\ \int_x \frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) &= \int_x -\frac{\dot{q}}{K} \\ \frac{dT}{dx} &= -\frac{\dot{q}}{K} \cdot x + C_1 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Fazendo a segunda integração:

$$\begin{aligned} \int_x \frac{dT}{dx} &= \int_x \left(-\frac{\dot{q}}{K} \cdot x + C_1 \right) \\ T(x) &= -\frac{\dot{q}}{2 \cdot K} x^2 + C_1 \cdot x + C_2 \end{aligned} \quad (5.7)$$

A Eq.5.7 é a mesma que foi determinada no capítulo 4.

Para o problema sem geração de calor $\dot{q}$, o perfil de temperatura é linear, e a equação simplifica para:

$$T(x) = C_1 \cdot x + C_2 \quad (5.8)$$

5.2.1 Aplicação das condições de contorno

São necessárias duas condições de contorno para determinar as constantes de integração. No caso, temos duas temperaturas especificadas. Assim

- Condição de Contorno 1

Temperatura da superfície na posição $x = 0$ conhecida:

$$T(x = 0) = T_1$$

- Condição de Contorno 2

Temperatura da superfície na posição $x = L$ conhecida:

$$T(x = L) = T_2$$

- Aplicando a primeira condição de contorno: $T_{(x=0)} = T_1$

$$\begin{aligned} T_1 &= C_1 \cdot 0 + C_2 \\ C_2 &= T_1 \end{aligned} \quad (5.9)$$

- Aplicando a segunda condição de contorno: $T_{(x=L)} = T_2$

$$\begin{aligned} T_2 &= C_1 \cdot L + C_2 \\ T_2 &= C_1 \cdot L + T_1 \\ C_1 &= \frac{T_2 - T_1}{L} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Substituindo as constantes de integração C_1 e C_2 na equação do perfil de temperatura (Eq. 5.8), obtidas da aplicação das condições de contorno, têm-se:

$$T_{(x)} = \left(\frac{T_2 - T_1}{L} \right) x + T_1 \quad (5.11)$$

Observamos que a Eq. 5.11 representa um perfil linear de temperatura na parede em função da posição x .

Uma vez que o perfil de temperaturas é conhecido, a taxa de calor [W] (ou fluxo de calor [W/m²]) pode ser determinada pela equação de Fourier. Para a taxa:

$$q = -k \cdot A \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \quad (5.12)$$

Da derivação da equação, obtemos que $\frac{\partial T}{\partial x} = C_1 = \frac{T_2 - T_1}{L}$. Assim:

$$q = -K \cdot A \cdot \left(\frac{T_2 - T_1}{L} \right) \quad (5.13)$$

O fluxo de calor (ou taxa) possui direção igual ao gradiente de temperatura mas sentido oposto. Seu sentido é de T_1 (maior temperatura) para T_2 (menor temperatura).

5.2.2 Resistência térmica à condução

Pode-se determinar a resistência térmica à condução na parede plana, lembrando que $q = \frac{\Delta T}{R_T}$:

$$\begin{aligned} q &= -K \cdot A \cdot \left(\frac{T_2 - T_1}{L} \right) \\ q &= K \cdot A \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{L} \\ q &= \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{L}{K \cdot A} \right)} = \frac{\Delta T}{R_T} \\ R_T &= \frac{L}{K \cdot A} \end{aligned} \quad (5.14)$$

A unidade de R_T será:

$$R_T = \frac{L}{K.A}$$

$$[R_T] = \frac{[m]}{\left[\frac{W}{m.K} \right] [m^2]}$$

$$[R_T] = \left[\frac{K}{W} \right] \quad (5.15)$$

$$(5.16)$$

5.2.3 Aplicando valores

Seja uma placa de espessura total $L = 60mm$ e condutividade térmica $K = 50W/m.K$ sem geração de calor interno. As paredes são mantidas á temperatura de $T_1 = 100^{\circ}C$ em $x = 0$ e $T_2 = 50^{\circ}C$ em $x = L$. Para condição de regime permanente, determine:

1. O perfil de temperatura na parede
2. O fluxo de calor na parede

Vamos considerar as hipóteses simplificadores:

1. Regime permanente

Todas as derivadas temporais são nulas: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

2. Unidimensional na coordenada x

3. Propriedades constantes

K pode ser retirado da derivada

4. Sem geração de calor interno: $\dot{q} = 0$

5. Condição de contorno 1:

temperatura conhecida T_1 na superfície em $x = 0$:

$$T(x = 0) = T_1$$

6. Condição de contorno 2:

temperatura conhecida T_2 na superfície em $x = L$:

$$T(x = L) = T_2$$

Aplicadas na equação da difusão, resultaram na Eq.5.11, repetida abaixo:

$$T_{(x)} = \left(\frac{T_2 - T_1}{L} \right) x + T_1$$

Substituindo valores, obtêm-se:

$x[m]$	$T(x) [^{\circ}C]$
0	100
0,01	91,67
0,02	83,33
0,03	75
0,04	66,67
0,05	58,33
0,06	50

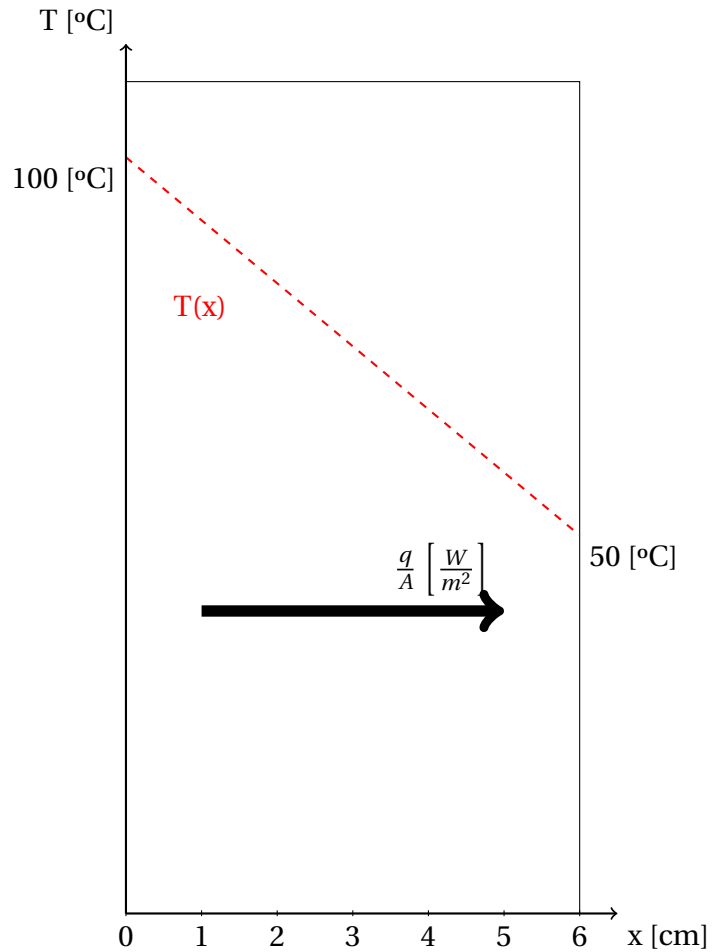


Figura 5.2 – Perfil de temperatura na placa em função da posição x e sentido do fluxo de calor

O fluxo de calor é:

$$\begin{aligned}\frac{q}{A} &= -K \cdot \left(\frac{T_2 - T_1}{L} \right) \\ \frac{q}{A} &= -50 \left[\frac{W}{m \cdot K} \right] \cdot \left(\frac{50 - 100}{0,06} \right) \frac{[K]}{[m]} \\ \frac{q}{A} &= 41666,67 \left[\frac{W}{m^2} \right]\end{aligned}\quad (5.17)$$

Observem que o fluxo de calor é positivo, indicando que é no mesmo sentido do eixo coordenado x adotado, ou seja, é da esquerda para a direita. Como esperado, o fluxo é no sentido da maior temperatura para a menor temperatura.

5.2.4 Análise da condutividade

Considere a parede analisada com temperatura $T = 100^{\circ}C$ em $x = 0$ e fluxo de calor $q' = 41666,67 \left[\frac{W}{m^2} \right]$, conforme calculado anteriormente. O que ocorre com a

temperatura na face direita quando a condutividade térmica varia? Temos duas possibilidades:

1. Condutividade aumenta

Quanto maior a condutividade, mais condutor é o material. A temperatura no corpo tende a ser mais uniforme. No limite, em que $K \rightarrow \infty$ não haverá gradiente de temperatura no corpo.

2. Condutividade diminui

Quanto menor a condutividade mais isolante é o material. Nesse caso a diferença de temperatura no corpo irá aumentar.

Da equação da condutividade, a temperatura na parede direita em função do fluxo de calor é:

$$\begin{aligned} q' &= -K \left(\frac{T_2 - T_1}{L} \right) \\ T_2 &= T_1 - \left(\frac{q' \cdot L}{K} \right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

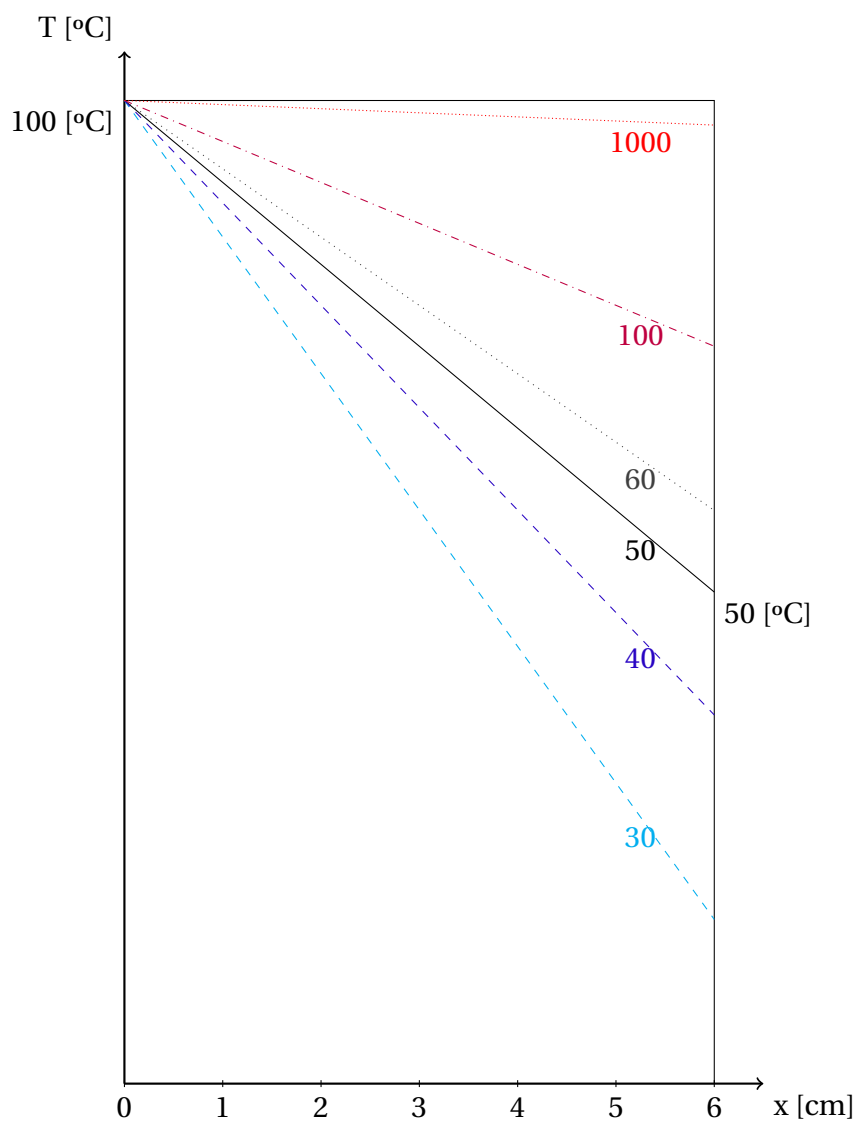


Figura 5.3 – Perfil de temperatura para fluxo de calor constante $q' = 41666,67 [W/m^2]$, temperatura na face esquerda fixa em $T = 100^{\circ}C$, placa com espessura de $60 [mm]$ e condutividades térmicas de $30 [W/m.K]$, $40 [W/m.K]$, $50 [W/m.K]$, $60 [W/m.K]$, $100 [W/m.K]$ e $1000 [W/m.K]$

Condução unidimensional permanente em coordenadas cartesianas com geração de calor

6.1 Objetivos do Capítulo

- Neste capítulo a equação da difusão será aplicada para problemas de transferência de calor unidimensional em regime permanente com geração de calor interno

Ao final deste capítulo, o aluno deve ser capaz de:

1. Aplicar a equação da difusão nas coordenadas adequadas
2. Aplicar as condições de contorno apropriadas
3. Desenvolver a equação algébrica à partir das condições de contorno, para coordenadas cartesianas.
4. Determinar as resistências térmicas para o sistema de coordenadas adotado.

6.2 Condução em uma placa plana com geração de calor interno

Considere uma placa plana de espessura L e condutividade térmica K com temperaturas das superfícies conhecidas de T_1 em $x = 0$ e T_2 em $x = L$ e geração de calor interno $\dot{q}$, conforme Fig. 6.1:

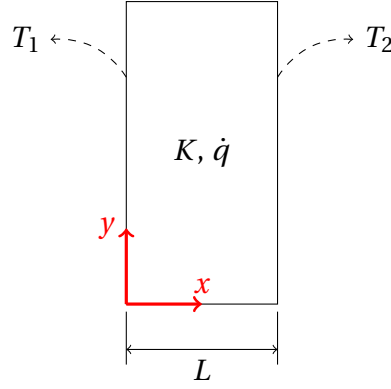


Figura 6.1 – Placa plana com geração de calor e temperaturas conhecidas nas paredes

Da equação da difusão de calor:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (K \cdot \nabla T) + \dot{q} \quad (6.1)$$

Em coordenadas cartesianas:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} \quad (6.2)$$

Adotando as hipóteses simplificadoras:

1. Regime permanente: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
Todas as derivadas temporais são nulas
2. Unidimensional na coordenada x
3. Propriedades constantes
 K pode ser retirado da derivada
4. Com geração de calor interno

Resolvendo a equação da difusão com as hipóteses adotadas:

$$0 = \frac{d}{dx} \left(K \frac{dT}{dx} \right) + \dot{q} \quad (6.3)$$

Adotando K constante:

$$0 = K \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) + \dot{q}$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{\dot{q}}{K} \quad (6.4)$$

A Eq. 6.4 é a equação da difusão 1-D em regime permanente com geração de calor interno $\dot{q}$.

Para a integração da equação, vamos utilizar o segundo teorema fundamental do cálculo, ou *Regra de Barrow*, que especifica que a integral da derivada de f é f :

$$\int_a^b \frac{df}{dx} = f(b) - f(a) \quad (6.5)$$

Fazendo a primeira integração em relação à coordenada x , com $f = \frac{dT}{dx}$:

$$\begin{aligned} \int_x \frac{d^2T}{dx^2} &= \int_x -\frac{\dot{q}}{K} \\ \int_x \frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) &= \int_x -\frac{\dot{q}}{K} \\ \frac{dT}{dx} &= -\frac{\dot{q}}{K} \cdot x + C_1 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Fazendo a segunda integração:

$$\begin{aligned} \int_x \frac{dT}{dx} &= \int_x \left(-\frac{\dot{q}}{K} \cdot x + C_1 \right) \\ T(x) &= -\frac{\dot{q}}{2 \cdot K} x^2 + C_1 \cdot x + C_2 \end{aligned} \quad (6.7)$$

A Eq.6.7 é a mesma que foi determinada no capítulo 4. O perfil de temperatura é parabólico.

6.2.1 Aplicação das condições de contorno

São necessárias duas condições de contorno para determinar as constantes de integração. No caso, temos duas temperaturas especificadas. Conforme apontado no Cap.3:

Um aspecto importante é não introduzir informações não acessíveis nas condições de contorno. É importante que a condição de contorno escolhida tenha um valor numérico acessível para que possa ser utilizado na solução.

- Condição de Contorno 1

Temperatura da superfície na posição $x = 0$ conhecida:

$$T(x = 0) = T_1$$

- Condição de Contorno 2

Temperatura da superfície na posição $x = L$ conhecida:

$$T(x = L) = T_2$$

- Aplicando a primeira condição de contorno: $T_{(x=0)} = T_1$

$$\begin{aligned}
T(x) &= -\frac{\dot{q}}{2.K}.x^2 + C_1.x + C_2 \\
T(x=0) &= -\frac{\dot{q}}{2.K}.0^2 + C_1.0 + C_2 \\
T_1 &= C_2
\end{aligned} \tag{6.8}$$

- Aplicando a segunda condição de contorno: $T_{(x=L)} = T_2$

$$\begin{aligned}
T(x) &= -\frac{\dot{q}}{2.K}.x^2 + C_1.x + C_2 \\
T(x=L) &= -\frac{\dot{q}}{2.K}.L^2 + C_1.L + C_2 \\
T_2 &= -\frac{\dot{q}}{2.K}.L^2 + C_1.L + T_1 \\
(T_2 - T_1) + \frac{\dot{q}}{2.K}.L^2 &= C_1.L \\
C_1 &= \frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{\dot{q}}{2.K}.L
\end{aligned} \tag{6.9}$$

E a equação se torna:

$$\begin{aligned}
T(x) &= -\frac{\dot{q}}{2.K}.x^2 + C_1.x + C_2 \\
T(x) &= -\frac{\dot{q}}{2.K}.x^2 + \left[\frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{\dot{q}}{2.K}.L \right].x + T_1 \\
T(x) &= -\frac{\dot{q}}{2.K}.x^2 + T_1 + \frac{(T_2 - T_1).x}{L} + \frac{\dot{q}}{2.K}.[L.x] \\
T(x) &= -\frac{\dot{q}}{2.K}.x^2 + \left[\frac{(T_2 - T_1)}{L} + \frac{\dot{q}}{2.K}.L \right].x + T_1
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Observamos que a Eq. 6.10 representa um perfil parabólico de temperatura na parede em função da posição x , com concavidade para baixo.

Uma vez que o perfil de temperaturas é conhecido, a taxa de calor [W] (ou fluxo de calor [W/m^2]) pode ser determinada pela equação de Fourier. Para a taxa:

$$q = -k.A.\frac{\partial T}{\partial x} \tag{6.11}$$

Já sabemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dx} &= -\frac{\dot{q}}{K}.x + C_1 \\
\frac{dT}{dx} &= -\frac{\dot{q}}{K}.x + \frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{\dot{q}}{2.K}.L
\end{aligned} \tag{6.12}$$

$$q = -K.A.\left(-\frac{\dot{q}}{K}.x + \frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{\dot{q}}{2.K}.L\right) \tag{6.13}$$

6.2.2 Aplicando valores

Uma placa tem espessura $L = 60[mm]$, condutividade térmica $K = 50[W/m.K]$ e geração de calor interno $\dot{q} = 5.10^6[W/m^3]$. A parede direita é mantida à temperatura de $T_2 = 100[^\circ C]$. Para condição de regime permanente e $100 \leq T_1[^\circ C] \leq 200$, determine:

1. Perfil de temperatura na parede
2. Máxima temperatura na parede
3. Fluxo de calor na posição $x = L$

A equação para o perfil de temperatura já foi determinada:

$$T(x) = -\frac{\dot{q}}{2.K}x^2 + \left[\frac{(T_2 - T_1)}{L} + \frac{\dot{q}}{2.K}.L \right].x + T_1 \quad (6.14)$$

O resultado para $0 \leq x \leq L$ é apresentado na Tab.6.1 e Fig.6.2 para temperatura $T_2 = 100^\circ C$ e T_1 de $100^\circ C$, $150^\circ C$ e $200^\circ C$.

Tabela 6.1 – Perfis de temperatura para $T_2 = 100[^\circ C]$ e $T_1 = 100[^\circ C]$, $T_1 = 150[^\circ C]$ e $T_1 = 200[^\circ C]$

x[m]	$T_1[100^\circ C]$	$T_1[150^\circ C]$	$T_1[200^\circ C]$
0	100	150	200
0.003	107.188	155.104	203.021
0.005	113.75	159.583	205.417
0.008	119.688	163.438	207.188
0.01	125	166.667	208.333
0.013	129.688	169.271	208.854
0.015	133.75	171.25	208.75
0.018	137.188	172.604	208.021
0.02	140	173.333	206.667
0.023	142.188	173.438	204.688
0.025	143.75	172.917	202.083
0.028	144.688	171.771	198.854
0.03	145	170	195
0.033	144.688	167.604	190.521
0.035	143.75	164.583	185.417
0.038	142.188	160.938	179.688
0.04	140	156.667	173.333
0.043	137.188	151.771	166.354
0.045	133.75	146.25	158.75
0.048	129.688	140.104	150.521
0.05	125	133.333	141.667
0.053	119.688	125.938	132.188
0.055	113.75	117.917	122.083
0.058	107.188	109.271	111.354
0.06	100	100	100

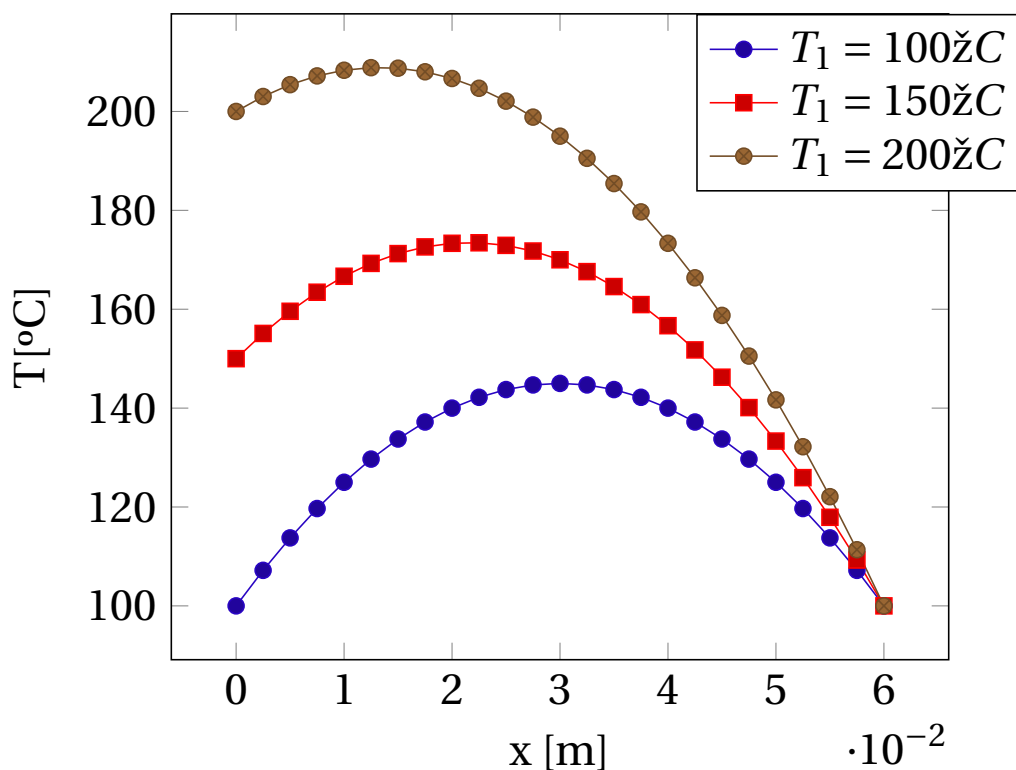


Figura 6.2 – Perfil de temperatura para condução unidimensional com geração de calor interno e temperaturas das paredes especificadas $T_2 = 100[^\circ\text{C}]$ e $T_1 = 100[^\circ\text{C}]$, $T_1 = 150[^\circ\text{C}]$ e $T_1 = 200[^\circ\text{C}]$

Observamos que a temperatura máxima é na linha de centro da placa no caso em que $T_1 = T_2$ e desloca para a esquerda à medida que $T_1 > T_2$.

6.2.3 Avaliando a condição de simetria

Considere uma placa de espessura $2L = 60[\text{mm}]$ e condutividade térmica $K = 50[\text{W}/\text{m}\cdot\text{K}]$ e geração de calor interno $\dot{q} = 5 \cdot 10^6[\text{W}/\text{m}^3]$. As paredes são mantidas às temperaturas iguais de $T_s = 100[^\circ\text{C}]$. Para condição de regime permanente, determine:

1. Perfil de temperatura na parede
2. Máxima temperatura na parede
3. Fluxo de calor na posição $x = L$ (superfície direita)
4. Compare com os resultados obtidos na seção anterior

Neste caso, vamos adotar o eixo de referência posicionado na linha de centro da placa.

A equação para o perfil de temperatura já foi obtida:

$$T(x) = -\frac{\dot{q}}{2K}x^2 + C_1 \cdot x + C_2 \quad (6.15)$$

- Condição de Contorno 1

Como as temperaturas são iguais nas superfícies da parede, pode-se adotar a condição de simetria na posição $x = 0$ (linha de centro):

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_{(x=0)} = 0$$

- Condição de Contorno 2

Temperatura da superfície na posição $x = L$ conhecida:

$$T(x = +L) = T_s$$

Nesse caso também é conhecida a temperatura na superfície na posição $x = -L$

- Aplicando a primeira condição de contorno: $\left(\frac{dT}{dx}\right)_{(x=0)} = 0$

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dx} &= -\frac{\dot{q}}{K} \cdot x + C_1 \\ 0 &= -\frac{\dot{q}}{K} \cdot 0 + C_1 \\ C_1 &= 0\end{aligned}\tag{6.16}$$

- Aplicando a condição de contorno de temperatura conhecida na parede: $T_{(x=-L)} = T_{x=+L} = T_s$

[*]Nesse caso, podemos utilizar tanto a parede esquerda como a direita. O sistema de coordenadas foi adotado à partir da linha de centro da placa.

$$\begin{aligned}T(x) &= -\frac{\dot{q}}{K} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2 \\ T(x = L) &= -\frac{\dot{q}}{K} \cdot \frac{L^2}{2} + C_2 \\ T_s &= -\frac{\dot{q}}{K} \cdot \frac{L^2}{2} + C_2 \\ C_2 &= T_s + \frac{\dot{q}}{K} \cdot \frac{L^2}{2}\end{aligned}\tag{6.17}$$

Substituindo as constantes de integração C_1 e C_2 na equação do perfil de temperatura (Eq. 6.7), obtidas da aplicação das condições de contorno, têm-se:

$$\begin{aligned}T(x) &= -\frac{\dot{q}}{K} \cdot \frac{x^2}{2} + T_s + \frac{\dot{q}}{K} \cdot \frac{L^2}{2} \\ T(x) &= T_s + \frac{\dot{q}}{2 \cdot K} (L^2 - x^2)\end{aligned}\tag{6.18}$$

Observamos que a Eq. 6.18 representa um perfil parabólico de temperatura na parede em função da posição x .

Uma vez que o perfil de temperaturas é conhecido, a taxa de calor [W] (ou fluxo de calor [W/m²]) pode ser determinada pela equação de Fourier. Para a taxa:

$$q = -k.A.\frac{\partial T}{\partial x} \quad (6.19)$$

Já sabemos que $\frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}}{K}.x$. Assim:

$$q = -K.A.\left(-\frac{\dot{q}}{K}.x\right) = \dot{q}.x \quad (6.20)$$

O fluxo de calor (ou taxa) possui direção igual ao gradiente de temperatura mas sentido oposto. Da análise da Eq. 6.18, observamos que o valor máximo da temperatura será para a posição $x = 0$, que é a linha de centro da placa plana:

$$T_{max} = T_s + \frac{\dot{q}}{2.K}L^2 \quad (6.21)$$

O gradiente de temperatura é no sentido das temperaturas das paredes T_s para a temperatura máxima na linha de centro, enquanto a taxa (e fluxo) de calor são na mesma direção mas no sentido oposto, da linha de centro para a superfícies da placa. No caso em análise, podemos considerar que metade do calor dissipado vai para a face direita e a outra metade para a face esquerda da placa.

Pode-se determinar a resistência térmica à condução na parede plana, lembrando que $q = \frac{\Delta T}{R_T}$:

$$\begin{aligned} q &= -K.A.\left(\frac{T_s - T_{max}}{L}\right) \\ q &= K.A.\frac{(T_{max} - T_s)}{L} \\ q &= \frac{(T_{max} - T_s)}{\left(\frac{L}{K.A}\right)} = \frac{\Delta T}{R_T} \\ R_T &= \frac{L}{K.A} \end{aligned} \quad (6.22)$$

Sendo L metade da espessura da placa. A unidade de R_T será:

$$\begin{aligned} R_T &= \frac{L}{K.A} \\ [R_T] &= \frac{[m]}{\left[\frac{W}{m.K}\right][m^2]} \\ [R_T] &= \left[\frac{K}{W}\right] \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$(6.24)$$

- Perfil de temperatura na parede

Substituindo valores na Eq. 6.18, com espessura da parede $L = 0,06[m]$ e $-0,03[m] \leq x \leq +0,03[m]$:

$$T_{(x)} = T_S + \frac{\dot{q}}{2K} (L^2 - x^2):$$

O resultado do perfil de temperatura, para os casos com geração de calor interno $\dot{q}$ e $2.\dot{q}$ são apresentados na Fig 6.3.

x[m]	T[°C]	T[°C] com $2.\dot{q}$
-0.03	100	100
-0.028	105.8	111.6
-0.026	111.2	122.4
-0.024	116.2	132.4
-0.022	120.8	141.6
-0.02	125	150
-0.018	128.8	157.6
-0.016	132.2	164.4
-0.014	135.2	170.4
-0.012	137.8	175.6
-0.01	140	180
-0.008	141.8	183.6
-0.006	143.2	186.4
-0.004	144.2	188.4
-0.002	144.8	189.6
0	145	190
0.002	144.8	189.6
0.004	144.2	188.4
0.006	143.2	186.4
0.008	141.8	183.6
0.01	140	180
0.012	137.8	175.6
0.014	135.2	170.4
0.016	132.2	164.4
0.018	128.8	157.6
0.02	125	150
0.022	120.8	141.6
0.024	116.2	132.4
0.026	111.2	122.4
0.028	105.8	111.6
0.03	100	100

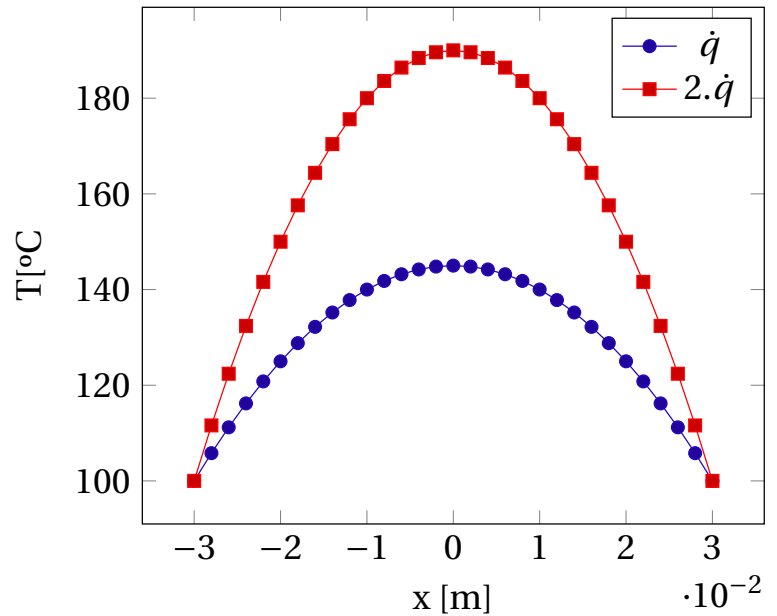


Figura 6.3 – Perfil de temperatura para condução unidimensional com geração de calor interno e temperaturas das paredes especificadas. Valores apresentados para geração interna $\dot{q}$ e para o caso em que a geração de calor interno é duplicada ($2.\dot{q}$)

Para temperaturas $T_1 = T_2 = 100[^\circ\text{C}]$ os resultados obtidos com as Eqs.6.10 e 6.18 são iguais, embora as condições de contorno aplicadas e até a posição de referência do

sistema de coordenadas sejam diferentes, o que resultou em constantes de integração diferentes. A Eq.6.10 é mais genérica, pois pode ser aplicada para qualquer valor de temperaturas T_1 e T_2 , enquanto a Eq.6.18 seja mais simples e mais específica, podendo ser aplicada apenas no caso em que $T_1 = T_2$. Como vemos, o sistema de coordenadas, sua referência e até mesmo as condições de contorno podem ser escolhidas de forma a simplificar ou generalizar o procedimento de solução. Essa é uma decisão que deve ser tomada no processo de modelagem.

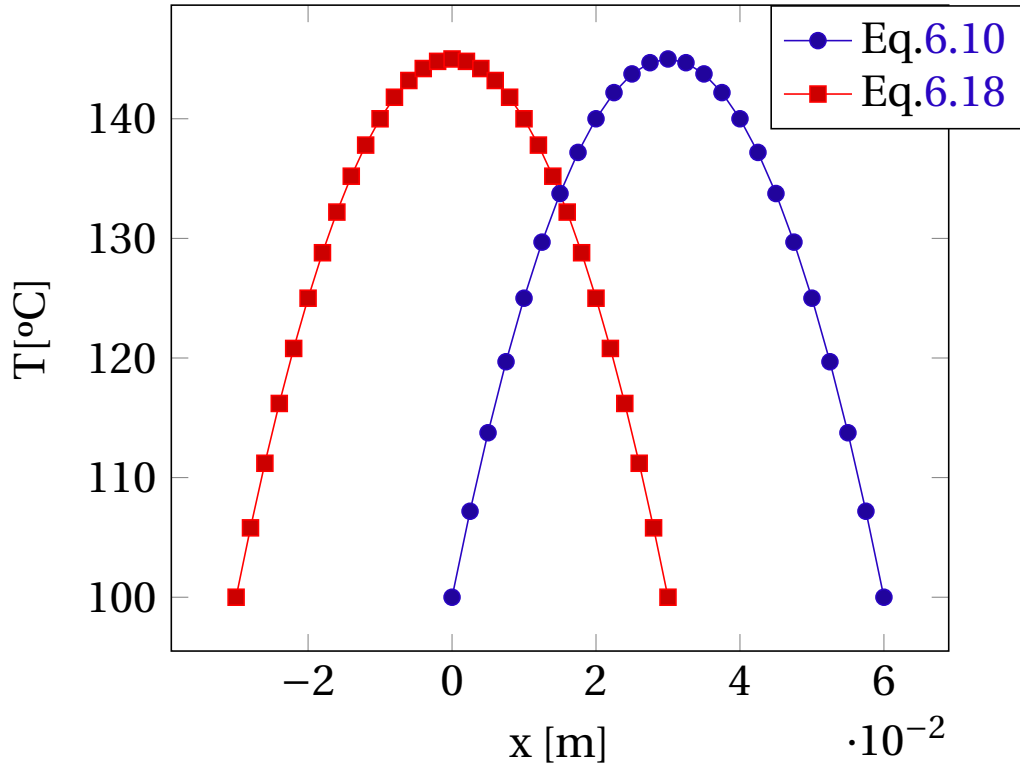


Figura 6.4 – Comparação entre os perfis de temperatura para resolução com a Eq.6.10 (considerando a parede entre $0 \leq x \leq 0.6[m]$ e condições de contorno de temperaturas especificadas) e a Eq.6.18 (considerando a parede entre $-0.3 \leq x \leq +0.3[m]$) e condição de contorno de simetria

,

Condução unidimensional permanente em coordenadas cartesianas. Resistência térmica

Uma parede composta consiste de 3 materiais dispostos em série. Não há troca de calor nas extremidades e a transferência de calor é unidimensional, conforme mostrado na Fig. 7.1. A parte interna está em contato com ar à temperatura T_∞ e coeficiente de convecção h_∞ . Considere que o sistema esteja em regime permanente. Determine a temperatura da superfície interna.

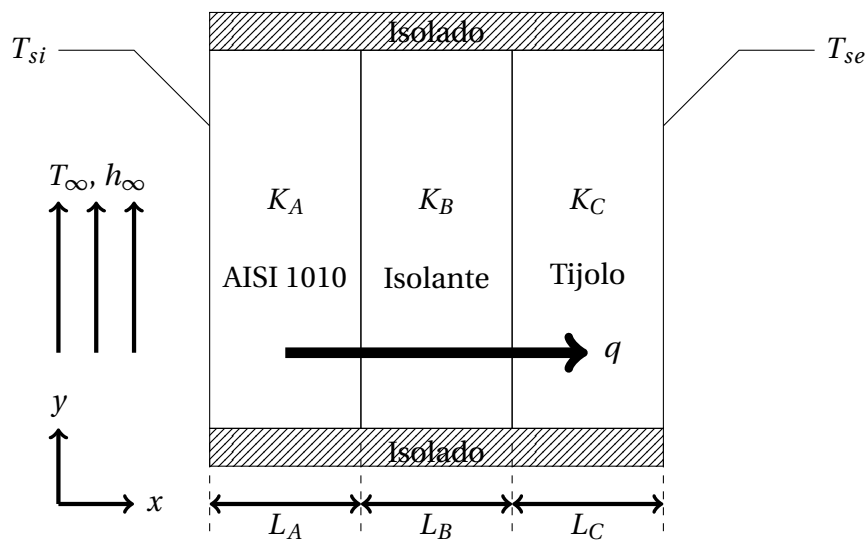


Figura 7.1 – Parede composta em série

Dados:

- $T_\infty = 225[^\circ\text{C}]$; $h_\infty = 25[\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}]$
- $T_{se} = 20[^\circ\text{C}]$
- Aço AISI 1010 $K_A = 63,9[\text{W}/\text{m} \cdot \text{K}]$; Material isolante $K_B = 0,4[\text{W}/\text{m} \cdot \text{K}]$; Tijolo $K_C = 0,72[\text{W}/\text{m} \cdot \text{K}]$

- $L_A = 0,6[m]$; $L_B = 0,03[m]$; $L_C = 0,04[m]$

Considere:

1. Regime permanente
2. Condução unidimensional na coordenada (x)
3. Propriedades constantes
4. Resistência térmica à condução:

$$R_T = \frac{L}{K.A}$$

Para este caso, a representação em nós e resistências térmicas fornece uma boa alternativa de solução.

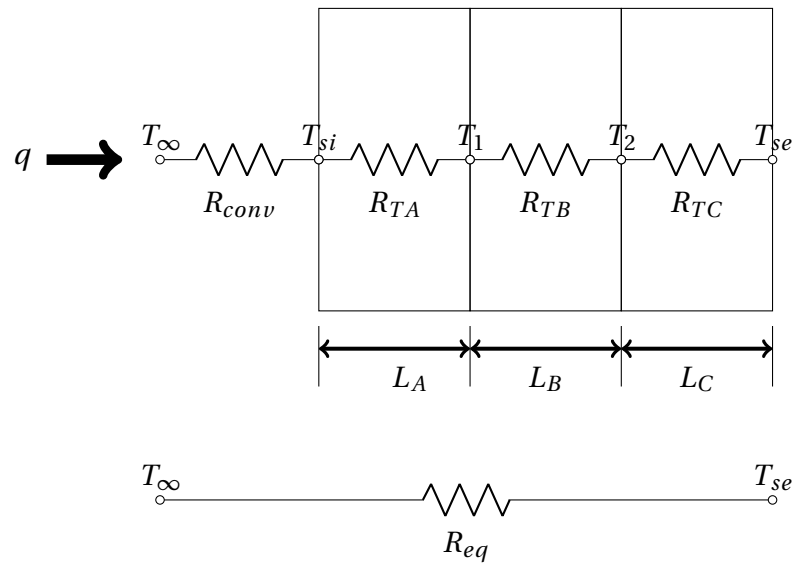


Figura 7.2 – Representação por nós e resistências térmicas e Resistência térmica equivalente

O cálculo da resistência equivalente R_{eq} ocorre da mesma forma que em resistências elétricas. No problema em análise as resistências estão em série, assim:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i = R_{conv} + R_A + R_B + R_C$$

$$R_{eq} = \frac{1}{h.A} + \frac{L_A}{K_A.A} + \frac{L_B}{K_B.A} + \frac{L_C}{K_C.A} \quad (7.1)$$

Sendo A a área da seção transversal.

Por analogia com sistemas elétricos:

$$U = R.I$$

$$\Delta T = R.q$$

No caso do circuito equivalente as temperaturas T_∞ e T_{se} são conhecidas. Os dados para o cálculo da resistência equivalente também são conhecidos, o que permite calcular o fluxo de calor $q' = \frac{q}{A}$:

$$\begin{aligned}
 q &= \frac{\Delta T}{R_{eq}} \\
 q &= \frac{\Delta T}{\left(\frac{1}{h \cdot A} + \frac{L_A}{K_A \cdot A} + \frac{L_B}{K_B \cdot A} + \frac{L_C}{K_C \cdot A} \right)} \\
 q &= \frac{\Delta T}{\frac{1}{A} \left(\frac{1}{h_\infty} + \frac{L_A}{K_A} + \frac{L_B}{K_B} + \frac{L_C}{K_C} \right)} \\
 q &= \frac{A \cdot \Delta T}{\left(\frac{1}{h_\infty} + \frac{L_A}{K_A} + \frac{L_B}{K_B} + \frac{L_C}{K_C} \right)} \\
 \frac{q}{A} &= \frac{\Delta T}{R'_{eq}} \\
 q' &= \frac{\Delta T}{R'_{eq}} \quad (7.2)
 \end{aligned}$$

O fluxo de calor q' pode ser calculado com a resistência equivalente R'_{eq} , que não depende da área da seção transversal.

Fazendo a substituição de valores:

$$\Delta T = T_\infty - T_{se} = 225 - 20 = 205 [K] \quad (7.3)$$

A diferença de temperatura é a mesma nas escalas Celsius e Kelvin!

$$\begin{aligned}
 R'_{eq} &= \frac{1}{h_\infty} + \frac{L_A}{K_A} + \frac{L_B}{K_B} + \frac{L_C}{K_C} \\
 R'_{eq} &= \frac{1}{25 [W/m^2 \cdot K]} + \frac{0,6 [m]}{63,9 [W/m \cdot K]} + \frac{0,03 [m]}{0,04 [W/m \cdot K]} + \frac{0,04 [m]}{0,72 [W/m \cdot K]} \\
 R'_{eq} &= 0,04 + 0,0094 + 0,075 + 0,0 \\
 R'_{eq} &= 0,18 [K \cdot m^2 / W] \quad (7.4)
 \end{aligned}$$

Com a obtenção da resistência equivalente R'_{eq} , pode-se determinar o fluxo de calor q' :

$$q' = \frac{\Delta T}{R'_{eq}} = \frac{205 [K]}{0,18 [K \cdot m^2 / W]} = 1138,89 \left[\frac{W}{m^2} \right] \quad (7.5)$$

Aplicando a primeira lei da termodinâmica (balanço de energia) na face esquerda da parede, temos o volume de controle da Fig. 7.3:

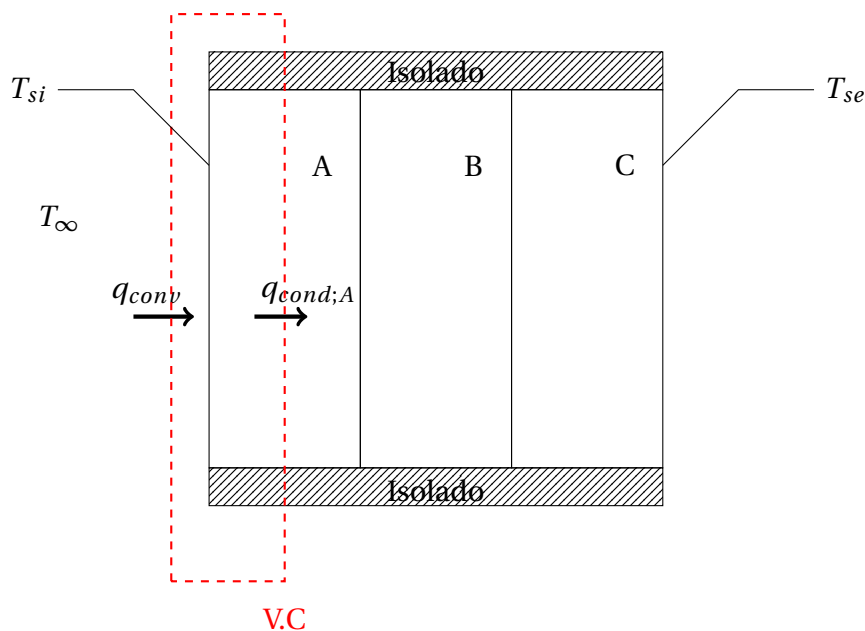


Figura 7.3 – Volume de controle na face esquerda. O calor que chega por convecção na face é conduzido através da parede A

Da primeira Lei:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} + \dot{W} \quad (7.6)$$

Não há realização de trabalho ($\dot{W} = 0$) e o sistema está em regime permanente ($\frac{dE}{dt} = 0$). Assim:

$$0 = \dot{Q} + 0 \quad (7.7)$$

Logo:

$$\begin{aligned} q'_{conv} \cdot A &= q'_{cond;A} \cdot A \\ q'_{conv} &= q'_{cond;A} \end{aligned} \quad (7.8)$$

Em qualquer região do corpo, através do balanço de energia (aplicação da primeira lei da termodinâmica), chegamos ao resultado que o fluxo de calor que chega na face esquerda da parede é o mesmo que sai na face direita. Ou seja, o calor que chega por convecção na face externa da parede é conduzido através do corpo A e depois através dos corpos B e em seguida pelo corpo C.

Este resultado tem implicações práticas muito importantes. Se o fluxo de calor foi determinado, podemos agora aplicá-lo em cada trecho do circuito térmico e obter as diferenças de temperatura. Para a superfície interna o circuito térmico considerado está destacado na Fig. 7.4

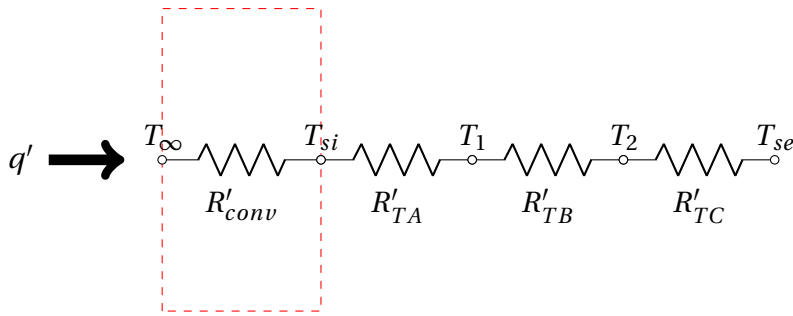


Figura 7.4 – Circuito térmico considerado para cálculo da temperatura da parede interna T_{si} . Calor e resistência estão representados em função do fluxo de calor q'

$$q' = \frac{T_{\infty} - T_{si}}{R'_{conv}} \quad (7.9)$$

Logo:

$$\begin{aligned} T_{si} &= T_{\infty} - q' \cdot R'_{conv} \\ T_{si} &= 225[\text{°C}] - 1138,89 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \cdot \frac{1}{25} \left[\frac{\text{m}^2 \cdot \text{°C}}{\text{W}} \right] \\ T_{si} &= 179,44[\text{°C}] \end{aligned} \quad (7.10)$$

Para a temperatura na face direita da parede A, podemos considerar o circuito térmico composto pelos nós T_{si} e T_1 ou T_{∞} até T_1 (nessa caso, calcula-se a resistência equivalente to trecho considerado).

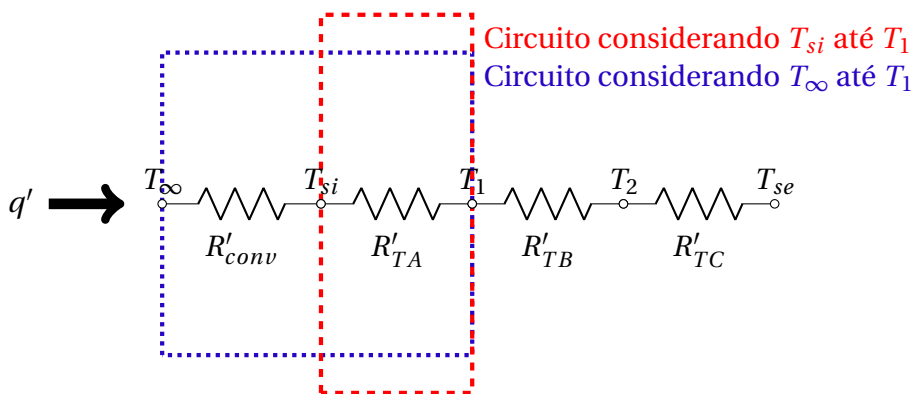


Figura 7.5 – Circuito térmico considerado para cálculo da temperatura da parede direita do material A. Calor e resistência estão representados em função do fluxo de calor q'

Para o trecho considerado, utilizando os nós T_{si} até T_1 :

$$q' = \frac{T_{si} - T_1}{R'_{cond;A}} \quad (7.11)$$

$$\begin{aligned}
 T_1 &= T_{si} - q' \cdot R'_{cond,A} \\
 T_1 &= 179,44[^\circ\text{C}] - 1138,89 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \cdot \frac{0,6}{63,9} \left[\frac{\text{m}}{\text{W/m}^\circ\text{C}} \right] \\
 T_1 &= 168,75[^\circ\text{C}]
 \end{aligned} \tag{7.12}$$

Para o trecho considerado, utilizando os nós T_∞ até T_1 :

$$q' = \frac{T_\infty - T_1}{R'_{conv} + R'_{cond,A}} \tag{7.13}$$

$$\begin{aligned}
 T_1 &= T_\infty - q' \cdot (R'_{conv} + R'_{cond,A}) \\
 T_1 &= 225[^\circ\text{C}] - 1138,89 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \cdot \left(\frac{1}{25} + \frac{0,6}{63,9} \right) \left[\frac{\text{m}}{\text{W/m}^\circ\text{C}} \right] \\
 T_1 &= 168,75[^\circ\text{C}]
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

Para a parede B, o mesmo procedimento utilizado na parede A pode ser adotado. Pode-se utilizar qualquer trecho apropriado do circuito térmico, seja de T_∞ até T_2 , de T_1 até T_2 ou mesmo de T_2 até T_{se} . Utilizando os nós T_1 e T_2 :

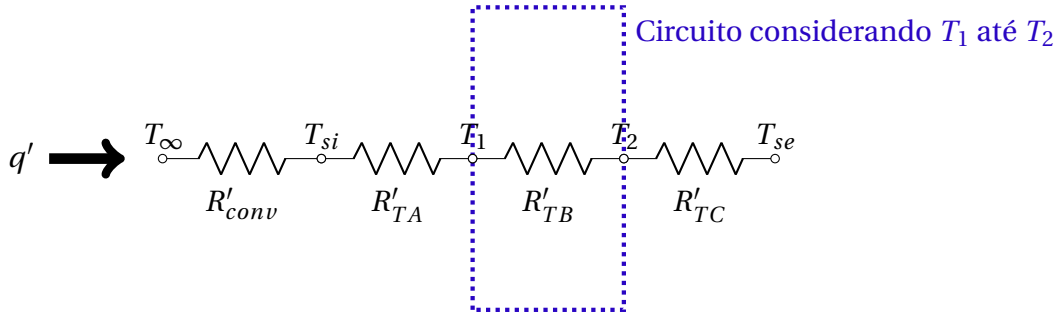


Figura 7.6 – Circuito térmico considerado para cálculo da temperatura da parede direita do material B. Calor e resistência estão representados em função do fluxo de calor q'

$$q' = \frac{T_1 - T_2}{R'_B} \tag{7.15}$$

$$\begin{aligned}
 T_2 &= T_1 - q' \cdot (R'_{cond,B}) \\
 T_2 &= 168,75[^\circ\text{C}] - 1138,89 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \cdot \left(\frac{0,03}{0,4} \right) \left[\frac{\text{m}}{\text{W/m}^\circ\text{C}} \right] \\
 T_2 &= 83,34[^\circ\text{C}]
 \end{aligned} \tag{7.16}$$

Outros circuitos podem ser considerados para a parede B, conforme demonstrado na Fig. 7.7:

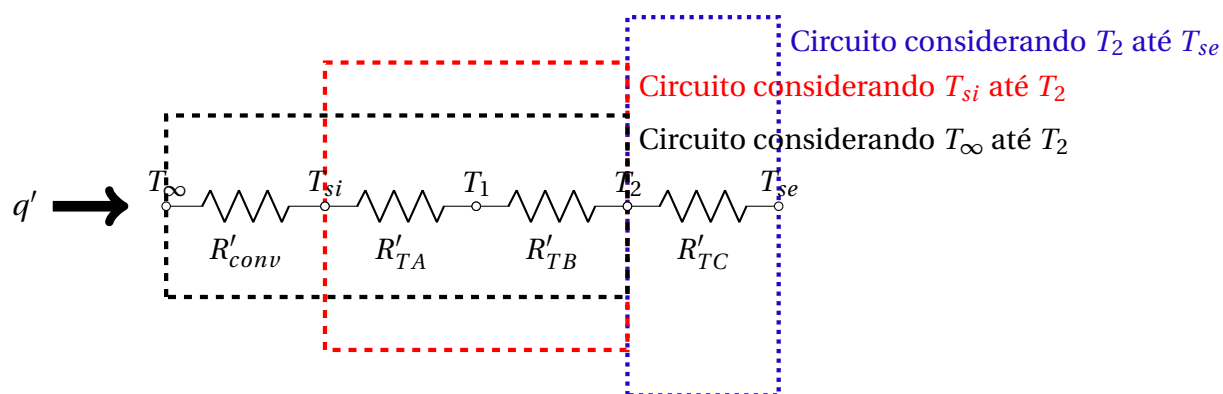


Figura 7.7 – Circuitos térmicos alternativos para cálculo da temperatura da parede do material B. Calor e resistência estão representados em função do fluxo de calor q'

Condução unidimensional permanente em coordenadas cilíndricas

8.1 Objetivos do Capítulo

- Neste capítulo a equação da difusão será aplicada para problemas de transferência de calor unidimensional em regime permanente em coordenadas cilíndricas

Ao final deste capítulo, o aluno deve ser capaz de:

1. Aplicar a equação da difusão nas coordenadas adequadas
2. Avaliar as hipóteses da modelagem de problemas de condução unidimensional
3. Avaliar os diversos tipos de condição de contorno e seu impacto no perfil de temperatura

8.2 A equação da difusão em coordenadas cilíndricas

Inicialmente, vamos avaliar a equação da difusão em coordenadas cilíndricas, unidimensional e em regime permanente. Em seguida faremos as integrações apropriadas e avaliaremos como determinar as constantes de integração, com a aplicação das condições de contorno.

A equação da difusão de calor é:

$$\rho.c.\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (K \cdot \nabla T) + \dot{q} \quad (8.1)$$

Em coordenadas cilíndricas:

$$\rho.c.\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(K_r \cdot r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(K_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} \quad (8.2)$$

Vamos adotar as seguintes hipóteses para a modelagem:

1. Regime permanente: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
Todas as derivadas temporais são nulas
2. Unidimensional na coordenada r (radial)
3. Propriedades constantes
 K pode ser retirado da derivada
4. Com geração de calor interno

Aplicando as hipóteses na equação da difusão em coordenadas cilíndricas, e como $T = T(r)$ somente, a equação se transforma na equação ordinária:

$$0 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(K_r \cdot r \cdot \frac{dT}{dr} \right) + \dot{q} \quad (8.3)$$

Para K constante, a equação ordinária a ser resolvida será:

$$\frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dT}{dr} \right) = - \frac{\dot{q} \cdot r}{K} \quad (8.4)$$

Fazendo a primeira integração em relação à posição r (lembrando que $\int \frac{df}{dx} = f + C$):

$$\begin{aligned} \int_r \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dT}{dr} \right) dr &= \int_r - \frac{\dot{q} \cdot r}{K} dr \\ r \frac{dT}{dr} &= - \frac{\dot{q} \cdot r^2}{2 \cdot K} + C_1 \end{aligned} \quad (8.5)$$

Fazendo a segunda integração em relação à coordenada r :

$$\begin{aligned} r \frac{dT}{dr} &= - \frac{\dot{q} \cdot r^2}{2 \cdot K} + C_1 \\ \frac{dT}{dr} &= - \frac{\dot{q} \cdot r}{2 \cdot K} + \frac{C_1}{r} \\ \int_r \frac{dT}{dr} dr &= \int_r - \frac{\dot{q} \cdot r}{2 \cdot K} dr + \int_r \frac{C_1}{r} dr \\ T(r) &= - \frac{\dot{q} \cdot r^2}{4 \cdot K} + C_1 \ln(r) + C_2 \end{aligned} \quad (8.6)$$

As constantes de integração C_1 e C_2 na equação do perfil de temperatura são determinadas com a aplicação das condições de contorno apropriadas. São elas que irão diferenciar o resultado de problemas particulares.

A solução de problemas particulares, com a correta aplicação das condições de contorno, será realizada nos capítulos subsequentes.

Condução unidimensional permanente em coordenadas cilíndricas: corpo sólido

9.1 Objetivos do Capítulo

- Neste capítulo a equação da difusão será aplicada para problemas de transferência de calor unidimensional em regime permanente em coordenadas cilíndricas

Ao final deste capítulo, o aluno deve ser capaz de:

1. Aplicar a equação da difusão nas coordenadas adequadas
2. Aplicar as condições de contorno apropriadas
3. Desenvolver a equação algébrica à partir das condições de contorno, para coordenadas cilíndricas
4. Determinar as resistências térmicas para o sistema de coordenadas adotado.

9.2 Condução em uma cabo sólido com geração de calor interno

Considere um cabo sólido e longo de diâmetro D e condutividade térmica K , com geração de energia interna $\dot{q}$. A superfície externa possui temperatura especificada T_s . Determine o perfil de temperatura e a equação para a taxa de calor.

Para esse caso as coordenadas cilíndricas são mais apropriadas. A equação da difusão, Eq. 3.9, repetida abaixo é:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (K \cdot \nabla T) + \dot{q}$$

Em coordenadas cilíndricas:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(K_r \cdot r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(K_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} \quad (9.1)$$

Adotando as hipóteses simplificadores:

1. Regime permanente: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
Todas as derivadas temporais são nulas
2. Unidimensional na coordenada r (radial)
3. Propriedades constantes
 K pode ser retirado da derivada
4. Com geração de calor interno

Após duas integrações, conforme Cap.8, obtém-se a Eq.8.6 para o perfil de temperatura em função do raio, repetida abaixo:

$$T(r) = -\frac{\dot{q}.r^2}{4.K} + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (9.2)$$

9.2.1 Aplicação das condições de contorno

São necessárias duas condições de contorno para determinar as constantes de integração. Para o caso em análise, temos:

- Condição de Contorno 1

Temperatura na superfície (posição $r = R$) conhecida:

$$T(r = R) = T_s$$

- Condição de Contorno 2

Condição de simetria na linha de centro do cabo:

$$\left(\frac{dT}{dr} \right)_{r=0} = 0$$

1. Fazendo a derivada da equação do perfil de temperatura, e isolando a constante de integração C_1 :

$$\begin{aligned} T(r) &= -\frac{\dot{q}.r^2}{4.K} + C_1 \ln(r) + C_2 \\ \frac{dT}{dr} &= -\frac{\dot{q}.r}{2.K} + C_1 \frac{1}{r} \\ r \cdot \frac{dT}{dr} &= -\frac{\dot{q}.r^2}{2.K} + C_1 \end{aligned} \quad (9.3)$$

2. Aplicando a condição de contorno de simetria na linha de centro:

$$\begin{aligned}
 r \cdot \left(\frac{dT}{dr} \right)_{r=0} &= -\frac{\dot{q} \cdot r^2}{2 \cdot K} + C_1 \\
 0 \cdot 0 &= -\frac{\dot{q} \cdot 0^2}{2 \cdot K} + C_1 \\
 C_1 &= 0
 \end{aligned} \tag{9.4}$$

Substituindo C_1 na Eq.8.6:

$$\begin{aligned}
 T(r) &= -\frac{\dot{q} \cdot r^2}{4 \cdot K} + C_1 \ln(r) + C_2 \\
 T(r) &= -\frac{\dot{q} \cdot r^2}{4 \cdot K} + C_2
 \end{aligned} \tag{9.5}$$

3. Aplicando a condição de contorno de temperatura especificada na superfície:

$$\begin{aligned}
 T(r=R) &= -\frac{\dot{q} \cdot R^2}{4 \cdot K} + C_2 \\
 T_s &= -\frac{\dot{q} \cdot R^2}{4 \cdot K} + C_2 \\
 C_2 &= T_s + \frac{\dot{q} \cdot R^2}{4 \cdot K}
 \end{aligned} \tag{9.6}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 T(r) &= -\frac{\dot{q} \cdot r^2}{4 \cdot K} + C_2 \\
 T(r) &= -\frac{\dot{q} \cdot r^2}{4 \cdot K} + T_s + \frac{\dot{q} \cdot R^2}{4 \cdot K} \\
 T(r) &= T_s + \frac{\dot{q}}{4 \cdot K} [R^2 - r^2] \\
 T(r) &= T_s + \frac{\dot{q}}{4 \cdot K} \cdot R^2 \left[1 - \frac{r^2}{R^2} \right]
 \end{aligned} \tag{9.7}$$

Para a taxa de calor, à partir da equação de Fourier e da Eq.9.3:

$$\begin{aligned}
q &= -K.A.\frac{dT}{dr} \\
r.\frac{dT}{dr} &= -\frac{\dot{q}.r^2}{2.K} + C_1 \\
r.\frac{dT}{dr} &= -\frac{\dot{q}.r^2}{2.K} \\
\frac{dT}{dr} &= -\frac{\dot{q}.r}{2.K} \\
q &= -K.A.\left(-\frac{\dot{q}.r}{2.K}\right) \\
q &= K.A.\left(\frac{\dot{q}.r}{2.K}\right) \\
q &= \frac{\dot{q}.r.A}{2}
\end{aligned} \tag{9.8}$$

9.2.2 Abordagem alternativa para determinação da equação para o perfil de temperatura

Uma outra forma de se obter a equação para o perfil de temperatura é, partindo da equação da difusão com as hipóteses de modelagem apropriadas, proceder à integração e substituir as condições de contorno, quando forem aplicáveis, antes de prosseguir com as novas integrações.

A equação da difusão após a aplicação das hipóteses do modelo é:

$$0 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(K_r.r.\frac{dT}{dr} \right) + \dot{q} \tag{9.9}$$

Para K constante, a equação ordinária a ser resolvida será:

$$\frac{d}{dr} \left(r.\frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\dot{q}.r}{K} \tag{9.10}$$

Fazendo a primeira integração em relação à posição r (lembrando que $\int \frac{df}{dx} = f + C$):

$$\begin{aligned}
\int_r \frac{d}{dr} \left(r.\frac{dT}{dr} \right) &= \int_r -\frac{\dot{q}.r}{K} \\
r.\frac{dT}{dr} &= -\frac{\dot{q}.r^2}{2.K} + C_1
\end{aligned} \tag{9.11}$$

Aplicando a condição de contorno de simetria: $\left(\frac{dT}{dr} \right)_{r=0} = 0$:

$$\begin{aligned}
r.\frac{dT}{dr} &= -\frac{\dot{q}.r^2}{2.K} + C_1 \\
0.0 &= -\frac{\dot{q}.0^2}{2.K} + C_1 \\
C_1 &= 0
\end{aligned} \tag{9.12}$$

A equação ordinária se torna:

$$\begin{aligned} r \frac{dT}{dr} &= -\frac{\dot{q} \cdot r^2}{2 \cdot K} \\ \frac{dT}{dr} &= -\frac{\dot{q} \cdot r^2}{2 \cdot K \cdot r} \\ \frac{dT}{dr} &= -\frac{\dot{q} \cdot r}{2 \cdot K} \end{aligned} \quad (9.13)$$

Fazendo a segunda integração em relação a r :

$$\begin{aligned} \int_r \frac{dT}{dr} &= \int_r -\frac{\dot{q} \cdot r}{2 \cdot K} \\ T(r) &= -\frac{\dot{q} \cdot r^2}{2 \cdot 2 \cdot K} + C_2 \\ T(r) &= -\frac{\dot{q} \cdot r^2}{4 \cdot K} + C_2 \end{aligned} \quad (9.14)$$

Aplicando a condição de contorno de temperatura especificada na superfície $T_{(r=R)} = T_s$

$$\begin{aligned} T(r) &= -\frac{\dot{q} \cdot r^2}{4 \cdot K} + C_2 \\ T(r=R) = T_s &= -\frac{\dot{q} \cdot R^2}{4 \cdot K} + C_2 \\ C_2 &= T_s + \frac{\dot{q} \cdot R^2}{4 \cdot K} \end{aligned} \quad (9.15)$$

Obtidas as constantes de integração C_1 e C_2 , a solução geral é:

$$\begin{aligned} T(r) &= -\frac{\dot{q} \cdot r^2}{4 \cdot K} + T_s + \frac{\dot{q} \cdot R^2}{4 \cdot K} \\ T(r) &= T_s + \frac{\dot{q}}{4 \cdot K} R^2 \left[1 - \frac{r^2}{R^2} \right] \end{aligned} \quad (9.16)$$

Observamos que o termo $\left[1 - \frac{r^2}{R^2} \right]$ varia entre os valores de 1, para $r = 0$ até o valor 0 para $r = R$. Dessa forma, o maior valor da temperatura, para esse caso, será quando $r = 0$:

$$T_{max} = T_s + \frac{\dot{q} R^2}{4 \cdot K} \quad (9.17)$$

9.2.3 Exercício 1

Seja o cabo sólido e longo de diâmetro 2cm, condutividade $K = 7,2 W/m.K$, com geração de calor uniforme $\dot{q} = 2 \times 10^7 [W/m^3]$ e temperatura na superfície de $100^\circ C$. Determine a máxima temperatura no cabo.

- Hipóteses do modelo
 - regime permanente
 - condução unidimensional na direção radial (coordenadas cilíndricas)
 - Propriedades constantes
 - Simetria no centro (condição de contorno)
 - Temperatura na superfície especificada (condição de contorno)

À partir das equação da difusão de calor em coordenadas cilíndricas, aplicadas as hipóteses do modelo e as condições de contorno apropriadas, obteve-se a equação para o perfil de temperatura:

$$T(r) = T_s + \frac{\dot{q}}{4.K} R^2 \left[1 - \frac{r^2}{R^2} \right] \quad (9.18)$$

E $T_{max} = T(r = 0)$. Assim:

$$T_{max} = T_s + \frac{\dot{q} R^2}{4.K}$$

$$T_{max} = 100[^\circ\text{C}] + \frac{1}{4} \cdot \frac{2 \times 10^7 \frac{[\text{W}]}{[\text{m}^3]} (1 \times 10^{-2} [\text{m}^2])^2}{7,2 [\text{W}/\text{m.K}]} \quad (9.19)$$

Na Eq.9.19 a fração do lado direito resulta em unidades [K], enquanto a temperatura está em [°C]. Devemos lembrar que a variação de temperatura nas escalas Celsius e Kelvin são iguais, dessa forma, para se obter a temperatura final em Celsius, basta somar os dois termos, ou converter 100°C para escala Kelvin e somar, o que resultará no mesmo valor de temperatura, apenas expresso em escalas distintas.

$$T_{max} = 100[^\circ\text{C}] + 69,44 = 169,44[^\circ\text{C}] \quad (9.20)$$

Condução unidimensional permanente em coordenadas cilíndricas: casca cilíndrica

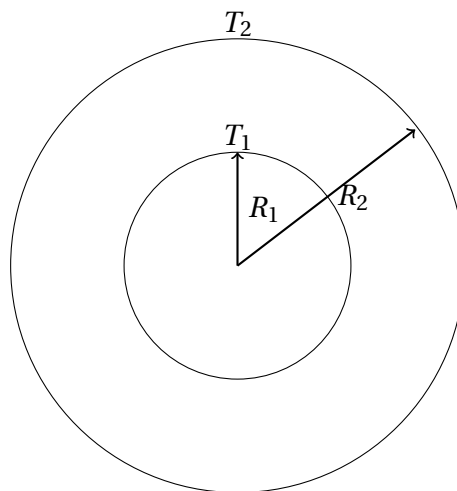
10.1 Objetivos do Capítulo

- Neste capítulo a equação da difusão será aplicada para problemas de transferência de calor unidimensional em regime permanente em coordenadas cilíndricas

Ao final deste capítulo, o aluno deve ser capaz de:

1. Aplicar a equação da difusão nas coordenadas adequadas
2. Aplicar as condições de contorno apropriadas
3. Desenvolver a equação algébrica à partir das condições de contorno, para coordenadas cilíndricas

10.2 Casca cilíndrica



Uma casca cilíndrica de comprimento L e condutividade K tem temperaturas especificadas T_1 em r_1 e T_2 em r_2 . Para regime permanente. Determine:

1. Distribuição de temperatura radial $T(r)$
2. Taxa de transferência de calor q através da camada
3. Resistência térmica R_t da camada

Adotando as hipóteses simplificadores:

1. Regime permanente: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
Todas as derivadas temporais são nulas
2. Unidimensional na coordenada r (radial)
3. Propriedades constantes
 K pode ser retirado da derivada
4. Condições de contorno:

$$\text{CC1: } T_{(r=r_1)} = T_1$$

$$\text{CC2: } T_{(r=r_2)} = T_2$$

Ambas as condições de contorno são relativas à temperatura especificada em determinada posição, o que implica que teremos que determinar a equação para o perfil de temperatura para depois obter as constantes de integração.

À partir da equação da difusão de calor em coordenadas cilíndricas, aplicadas as hipóteses simplificadoras e realizada a integração em função da coordenada r , resulta na Eq.8.6, repetida abaixo:

$$T(r) = -\frac{q \cdot r^2}{4 \cdot K} + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (10.1)$$

Para o caso sem geração de calor interno $\dot{q}$:

$$T(r) = C_1 \ln(r) + C_2 \quad (10.2)$$

Aplicando as condições de contorno de temperaturas conhecidas:

$$T_1 = C_1 \ln r_1 + C_2 \quad (10.3)$$

$$T_2 = C_1 \ln r_2 + C_2 \quad (10.4)$$

Subtraindo a Eq.10.4 da Eq.10.3:

$$\begin{aligned} T_1 - T_2 &= (C_1 \ln r_1 + C_2) - (C_1 \ln r_2 + C_2) \\ T_1 - T_2 &= C_1 \ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \\ C_1 &= \frac{T_1 - T_2}{\ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right)} \end{aligned} \quad (10.5)$$

Obtido C_1 , pode-se substituir tanto na Eq.10.3 quanto na Eq.10.4 para obter C_2 :

$$\begin{aligned} C_2 &= T_1 - C_1 \ln r_1 \\ C_2 &= T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \ln r_1 \end{aligned} \quad (10.6)$$

E a equação para o perfil de temperatura é:

$$\begin{aligned} T(r) &= C_1 \ln r + C_2 \\ T(r) &= \left[\frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \right] \ln r + \left[T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \ln r_1 \right] \\ T(r) &= \left[\frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \right] \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) + T_1 \end{aligned} \quad (10.7)$$

A Eq.10.7 também pode ser escrita como:

$$T(r) = T_1 - \left[\frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \right] \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) \quad (10.8)$$

Para a taxa de calor, aplicamos a equação de Fourier:

$$q = -K.A.\frac{dT}{dr} \quad (10.9)$$

Em que a área na casca cilíndrica é:

$$A = 2.\pi.r.L \quad (10.10)$$

Derivando a equação do perfil de temperatura sem geração de calor interno (Eq.10.2):

$$\begin{aligned} T(r) &= C_1 \ln(r) + C_2 \\ \frac{dT}{dr} &= \frac{C_1}{r} \end{aligned} \quad (10.11)$$

C_1 já foi determinado, logo:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{\frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}}{r} \quad (10.12)$$

A equação para a taxa de calor é:

$$\begin{aligned}
 q &= -K.A.\frac{dT}{dr} \\
 q &= -K.2.\pi.r.L.\left[\frac{\frac{T_1-T_2}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}}{r}\right] \\
 q &= -K.2.\pi.L.\left[\frac{T_1-T_2}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}\right] \\
 q &= 2.K.\pi.L.\left[\frac{T_1-T_2}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}\right]
 \end{aligned} \tag{10.13}$$

10.2.1 Resistência térmica à condução

Escrevendo na forma de resistência térmica:

$$\begin{aligned}
 q &= \frac{\Delta T}{R_T} \\
 q &= \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2.\pi.K.L}} \\
 R_T &= \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2.\pi.K.L}
 \end{aligned} \tag{10.14}$$

Condução unidimensional permanente em coordenadas cilíndricas: resistência térmica

11.1 Objetivos do Capítulo

- Neste capítulo a equação da difusão será aplicada para problemas de transferência de calor unidimensional em regime permanente em coordenadas cilíndricas

Ao final deste capítulo, o aluno deve ser capaz de:

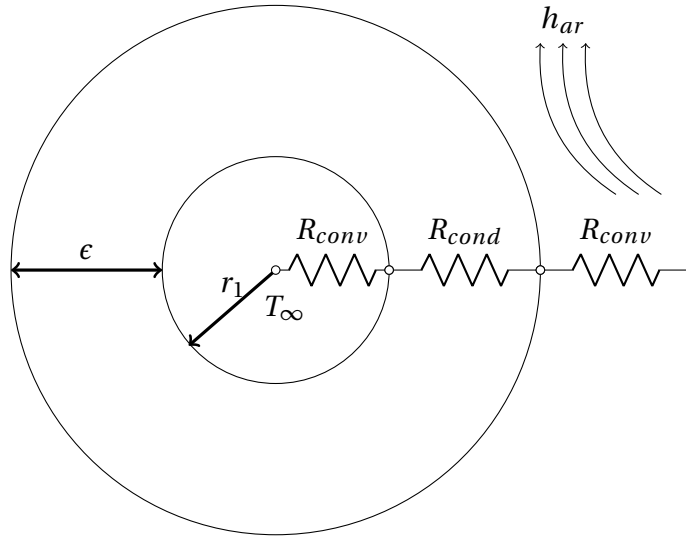
1. Aplicar a equação da difusão nas coordenadas adequadas
2. Aplicar as condições de contorno apropriadas
3. Desenvolver a equação algébrica à partir das condições de contorno, para coordenadas cilíndricas
4. Aplicar o conceito de resistência térmica na coordenada apropriada

11.2 Casca cilíndrica e resistência térmica

Água quente à temperatura T_{∞} e coeficiente de convecção h_{∞} escoa no interior de um tubo de cobre de parede fina com diâmetro D , que está envolto com isolante de espessura ϵ_i e condutividade térmica K_i . O ar ambiente está à temperatura T_{ar} e possui coeficiente de convecção h_{ar} com a parede externa do isolante. Calcule:

1. A taxa de calor por unidade de comprimento do tubo

Representando o modelo em termos de resistências térmicas, temos:



Dados:

- $T_{\infty} = 100^{\circ}\text{C}$; $T_{ar} = 25^{\circ}\text{C}$;
- $h_{\infty} = 30[\text{W}/\text{m}^2.\text{K}]$; $h_{ar} = 20[\text{W}/\text{m}^2.\text{K}]$;
- $K_{\text{cobre}} = 401[\text{W}/\text{m.K}]$; $K_{\text{isolante}} = 0,05[\text{W}/\text{m.K}]$;
- $D = 4\text{cm}$; $\epsilon = 2\text{cm}$;

Resolvendo o problema por resistência térmica, temos:

$$q = \frac{\Delta T}{R_{eq}} \quad (11.1)$$

As resistências estão em série, assim:

$$\begin{aligned} R_{conv} &= \frac{1}{h_{\infty} \cdot A_1} \\ A_1 &= 2\pi r_1 L \\ R_{conv} &= \frac{1}{h_{\infty} \cdot 2\pi \cdot r_1 \cdot L} \end{aligned} \quad (11.2)$$

Conforme o enunciado o tubo de cobre é de parede fina, dessa forma sua resistência térmica não será considerada. Para o isolante, têm-se:

$$\begin{aligned} r_2 &= r_1 + \epsilon \\ R_i = R_{cond} &= \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi \cdot K_i \cdot L} \end{aligned} \quad (11.3)$$

A resistência à convecção entre a parede externa do isolante e o ar é:

$$R_{conv}^{Ar} = \frac{1}{h_{ar} \cdot A_2}$$

$$A_2 = 2\pi r_2 L$$

$$R_{conv}^{Ar} = \frac{1}{h_{ar} \cdot 2\pi \cdot r_2 \cdot L} \quad (11.4)$$

Assim, a resistência equivalente é:

$$R_{eq} = R_{conv} + R_i + R_{conv}^{Ar}$$

$$R_{eq} = \frac{1}{h_{\infty} \cdot 2\pi \cdot r_1 \cdot L} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi \cdot K_i \cdot L} + \frac{1}{h_{ar} \cdot 2\pi \cdot r_2 \cdot L} \quad (11.5)$$

Substituindo valores: $r_1 = 2\text{ cm}$; $r_2 = r_1 + \epsilon = 2 + 2 = 4\text{ cm}$

$$R_{eq} = \frac{1}{30 \left[\frac{W}{m^2 \cdot K} \right] \cdot 2\pi \cdot (2 \cdot 10^{-2}) [m] \cdot L} + \frac{\ln\left(\frac{4\text{ cm}}{2\text{ cm}}\right)}{2\pi \cdot 0,05 \left[\frac{W}{m \cdot K} \right] \cdot L} + \frac{1}{20 \left[\frac{W}{m^2 \cdot K} \right] \cdot 2\pi \cdot 4 \cdot 10^{-2} [m] \cdot L}$$

$$= \frac{0,2653}{L} + \frac{2,20}{L} + \frac{0,1989}{L}$$

$$R_{eq} = \frac{2,67}{L} \left[\frac{m \cdot K}{W} \right] \quad (11.6)$$

- $\Delta T = T_{\infty} - T_{ar} = 100 - 25 = 75^{\circ}\text{C}$

$$q = \frac{\Delta T}{R_{eq}}$$

$$q = \frac{75 [K]}{\frac{2,67}{L} \left[\frac{m \cdot K}{W} \right]}$$

$$\frac{q}{L} = 28 \left[\frac{W}{m} \right] \quad (11.7)$$

Condução unidimensional permanente em coordenadas esféricas

12.1 Objetivos do Capítulo

- Neste capítulo a equação da difusão será aplicada para problemas de transferência de calor unidimensional em regime permanente em coordenadas esféricas

Ao final deste capítulo, o aluno deve ser capaz de:

1. Aplicar a equação da difusão nas coordenadas adequadas
2. Aplicar as condições de contorno apropriadas
3. Desenvolver a equação algébrica à partir das condições de contorno, para coordenadas esféricas
4. Determinar as resistências térmicas para o sistema de coordenadas adotado.

12.2 Condução em uma esfera

Inicialmente, vamos avaliar a equação da difusão em coordenadas esféricas, unidimensional e em regime permanente. Em seguida faremos as integrações apropriadas e avaliaremos como determinar as constantes de integração, com a aplicação das condições de contorno.

De fato, o que diferencia os problemas de transferência de calor, além das coordenadas adotadas, são as hipóteses de modelagem e as condições de contorno.

A equação da difusão de calor é:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (K \cdot \nabla T) + \dot{q} \quad (12.1)$$

Em coordenadas esféricas:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(K_r r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(K_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(K_\phi \sin \phi \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \dot{q} \quad (12.2)$$

Vamos adotar as seguintes hipóteses para a modelagem:

1. Regime permanente

Implica que todas as derivadas temporais são nulas: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

2. Unidimensional na coordenada radial

3. Propriedades constantes

K pode ser retirado da derivada

Aplicando as hipóteses na equação da difusão em coordenadas esféricas, e como $T = T(r)$ somente, a equação se transforma na equação ordinária:

$$0 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(K_r r^2 \frac{dT}{dr} \right) + \dot{q} \quad (12.3)$$

Adotando K constante:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{K_r}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) + \dot{q} \\ \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) &= -\frac{\dot{q} \cdot r^2}{K} \end{aligned} \quad (12.4)$$

A Eq. 12.4 é a equação da difusão 1-D em regime permanente com geração de calor interno $\dot{q}$.

Para a integração da equação, vamos utilizar o segundo teorema fundamental do cálculo, que especifica que a integral da derivada de f é f :

$$\int_a^b \frac{df}{dx} = f(b) - f(a) \quad (12.5)$$

Fazendo a primeira integração em relação à coordenada r , com $f = \frac{dT}{dr}$:

$$\begin{aligned} \int_r \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) dr &= \int_r -\frac{\dot{q} \cdot r^2}{K} dr \\ r^2 \frac{dT}{dr} &= -\frac{\dot{q} \cdot r^3}{3K} + C_1 \end{aligned} \quad (12.6)$$

Fazendo a segunda integração em relação à coordenada r :

$$\begin{aligned}
 r^2 \frac{dT}{dr} &= -\frac{\dot{q} \cdot r^3}{3K} + C_1 \\
 \frac{dT}{dr} &= -\frac{\dot{q} \cdot r}{3 \cdot K} + \frac{C_1}{r^2} \\
 \int_r \frac{dT}{dr} dr &= \int_r -\frac{\dot{q} \cdot r}{3 \cdot K} dr + \int_r \frac{C_1}{r^2} dr \\
 T(r) &= -\frac{\dot{q} \cdot r^2}{6 \cdot K} - \frac{C_1}{r} + C_2
 \end{aligned} \tag{12.7}$$

As constantes de integração C_1 e C_2 na equação do perfil de temperatura são determinadas com a aplicação das condições de contorno apropriadas. São elas que irão diferenciar o resultado de problemas particulares.

Da análise da Eq.12.7, chegamos às seguintes conclusões:

1. Quando houver geração de calor $\dot{q}$, o perfil de temperaturas será parabólico, com concavidade para baixo
2. Quando não houver geração de calor interno, o perfil de temperatura será linear.

A solução de problemas particulares, com a correta aplicação das condições de contorno, será realizada nos capítulos subsequentes.

Condução unidimensional permanente em coordenadas esféricas: corpo sólido

13.1 Objetivos do Capítulo

- Neste capítulo a equação da difusão será aplicada para problemas de transferência de calor unidimensional em regime permanente em corpo sólido em coordenadas esféricas

Ao final deste capítulo, o aluno deve ser capaz de:

1. Aplicar a equação da difusão nas coordenadas adequadas
2. Aplicar as condições de contorno apropriadas
3. Desenvolver a equação algébrica à partir das condições de contorno, para coordenadas esféricas
4. Determinar as resistências térmicas para o sistema de coordenadas adotado.

13.2 Condução em uma esfera sólida com geração de calor interno

Considere uma esfera de raio r , condutividade K e geração de calor interno $\dot{q}$. A superfície externa possui temperatura especificada T_s . Determine o perfil de temperatura e a equação para a taxa de calor.

Para esse caso as coordenadas esféricas são mais apropriadas. A equação da difusão, Eq. 3.9, repetida abaixo é:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (K \cdot \nabla T) + \dot{q}$$

Em coordenadas esféricas:

$$\rho.c. \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(K_r r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(K_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(K_\phi \sin \phi \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \dot{q} \quad (13.1)$$

Adotando as hipóteses simplificadores:

1. Regime permanente: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
Todas as derivadas temporais são nulas
2. Unidimensional na coordenada r (radial)
3. Propriedades constantes
 K pode ser retirado da derivada
4. Com geração de calor interno

Após duas integrações, conforme Cap.12, obtém-se a Eq.12.7 para o perfil de temperatura em função do raio, repetida abaixo:

$$T(r) = -\frac{\dot{q}.r^2}{6.K} - \frac{C_1}{r} + C_2 \quad (13.2)$$

13.2.1 Aplicação das condições de contorno

São necessárias duas condições de contorno para determinar as constantes de integração. Para o caso em análise, temos:

- Condição de Contorno 1

Condição de simetria na esfera:

$$\left(\frac{dT}{dr} \right)_{r=0} = 0$$

- Condição de Contorno 2

Temperatura na superfície (posição $r = R$) conhecida:

$$T(r = R) = T_s$$

1. Fazendo a derivada da equação do perfil de temperatura, e isolando a constante de integração C_1 :

$$\begin{aligned} T(r) &= -\frac{\dot{q}.r^2}{6.K} - \frac{C_1}{r} + C_2 \\ \frac{dT}{dr} &= -2 \cdot \frac{\dot{q}.r}{6.K} - (-1) \frac{C_1}{r^2} \\ r^2 \frac{dT}{dr} &= -\frac{\dot{q}.r^3}{3K} + C_1 \\ C_1 &= r^2 \frac{dT}{dr} + \frac{\dot{q}.r^3}{3.K} \end{aligned} \quad (13.3)$$

2. Aplicando a condição de contorno de simetria na esfera:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= r^2 \left(\frac{dT}{dr} \right)_{r=0} + \frac{\dot{q} \cdot r^3}{3 \cdot K} \\
 C_1 &= 0^2 \cdot (0) + \frac{\dot{q} \cdot 0^3}{3 \cdot K} \\
 C_1 &= 0
 \end{aligned} \tag{13.4}$$

Substituindo C_1 na Eq.12.7:

$$\begin{aligned}
 T(r) &= -\frac{\dot{q} \cdot r^2}{6 \cdot K} - 2 \cdot \frac{C_1}{r} + C_2 \\
 T(r) &= -\frac{\dot{q} \cdot r^2}{6 \cdot K} + C_2
 \end{aligned} \tag{13.5}$$

3. Aplicando a condição de contorno de temperatura especificada na superfície:

$$\begin{aligned}
 T(r=R) &= -\frac{\dot{q} \cdot r^2}{6 \cdot K} + C_2 \\
 T_s &= -\frac{\dot{q} \cdot R^2}{6 \cdot K} + C_2 \\
 C_2 &= T_s + \frac{\dot{q} \cdot R^2}{6 \cdot K}
 \end{aligned} \tag{13.6}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 T(r) &= -\frac{\dot{q} \cdot r^2}{6 \cdot K} - \frac{C_1}{r} + C_2 \\
 T(r) &= -\frac{\dot{q} \cdot r^2}{6 \cdot K} + T_s + \frac{\dot{q} \cdot R^2}{6 \cdot K} \\
 T(r) &= T_s + \frac{\dot{q}}{6 \cdot K} [R^2 - r^2] \\
 T(r) &= T_s + \frac{\dot{q}}{6 \cdot K} \cdot R^2 \left[1 - \frac{r^2}{R^2} \right]
 \end{aligned} \tag{13.7}$$

Para a taxa de calor, à partir da equação de Fourier e da Eq.13.3 (derivada da temperatura):

$$\begin{aligned}
q &= -K.A.\frac{dT}{dr} \\
\frac{dT}{dr} &= -\frac{\dot{q}.r}{3.K} + \frac{C_1}{r^2} \\
\frac{dT}{dr} &= -\frac{\dot{q}.r}{3.K} \\
q &= -K.A.\left(-\frac{\dot{q}.r}{3.K}\right) \\
q &= K.A.\left(\frac{\dot{q}.r}{3.K}\right) \\
q &= \frac{\dot{q}.r.A}{3}
\end{aligned} \tag{13.8}$$

13.2.2 Abordagem alternativa para determinação da equação para o perfil de temperatura

Uma outra forma de se obter a equação para o perfil de temperatura é, partindo da equação da difusão com as hipóteses de modelagem apropriadas, proceder à integração e substituir as condições de contorno, quando forem aplicáveis, antes de prosseguir com as novas integrações.

A equação da difusão após a aplicação das hipóteses do modelo é:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\dot{q}.r^2}{K} \tag{13.9}$$

Fazendo a primeira integração em relação à posição r (lembrando que $\int \frac{df}{dx} = f + C$):

$$\begin{aligned}
\int_r \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) dr &= \int_r -\frac{\dot{q}.r^2}{K} dr \\
r^2 \frac{dT}{dr} &= -\frac{\dot{q}.r^3}{3K} + C_1
\end{aligned} \tag{13.10}$$

Aplicando a condição de contorno de simetria: $\left(\frac{dT}{dr}\right)_{r=0} = 0$:

$$\begin{aligned}
0^2.0 &= -\frac{\dot{q}.0^3}{3K} + C_1 \\
C_1 &= 0
\end{aligned} \tag{13.11}$$

A equação ordinária se torna:

$$\begin{aligned}
r^2 \frac{dT}{dr} &= -\frac{\dot{q}.r^3}{3K} \\
\frac{dT}{dr} &= -\frac{\dot{q}.r^3}{3K.r^2} \\
\frac{dT}{dr} &= -\frac{\dot{q}.r}{3K}
\end{aligned} \tag{13.12}$$

Fazendo a segunda integração em relação a r :

$$\begin{aligned}\int_r \frac{dT}{dr} dr &= \int_r -\frac{\dot{q} \cdot r}{3K} dr \\ T(r) &= -\frac{\dot{q} \cdot r^2}{2 \cdot 3 \cdot K} + C_2 \\ T(r) &= -\frac{\dot{q} \cdot r^2}{6 \cdot K} + C_2\end{aligned}\quad (13.13)$$

Aplicando a condição de contorno de temperatura especificada na superfície $T_{(r=R)} = T_s$

$$\begin{aligned}T(r) = T_s &= -\frac{\dot{q} \cdot R^2}{6 \cdot K} + C_2 \\ C_2 &= T_s + \frac{\dot{q} \cdot R^2}{6 \cdot K}\end{aligned}\quad (13.14)$$

E a equação para o perfil de temperatura é:

$$\begin{aligned}T(r) &= -\frac{\dot{q} r^2}{6 \cdot K} + T_s + \frac{\dot{q} \cdot R^2}{6 \cdot K} \\ T(r) &= T_s + \frac{\dot{q} \cdot R^2}{6 \cdot K} \left[1 - \frac{r^2}{R^2} \right]\end{aligned}\quad (13.15)$$

13.2.3 Substituindo valores

Seja uma esfera de diâmetro 2cm, condutividade $K = 7,2 \text{ W/m.K}$, com geração de calor uniforme $\dot{q} = 2 \times 10^7 [\text{W/m}^3]$ e temperatura na superfície de 100°C . Determine a máxima temperatura na esfera.

Pela análise da Eq.13.7, observamos que a máxima temperatura será para a posição $r = 0$ (centro da esfera). Assim:

$$\begin{aligned}T_{max} &= T_s + \frac{\dot{q} \cdot R^2}{6 \cdot K} \left[1 - \frac{r^2}{R^2} \right] \\ T_{max} &= T_s + \frac{\dot{q} \cdot R^2}{6 \cdot K} \\ T_{max} &= 100[\text{°C}] + \frac{2 \times 10^7 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right] \cdot (1 \cdot 10^{-2})^2 [\text{m}^2]}{6 \times 7,2 \left[\frac{\text{W}}{\text{m.K}} \right]} \\ T_{max} &= 100[\text{°C}] + 46,29[\text{K}] \\ T_{max} &= 146,29[\text{°C}]\end{aligned}\quad (13.16)$$

As temperaturas nas escalas Celsius e Kelvin podem ser somadas, pois a variação em ambas as escalas é a mesma.

O perfil de temperatura ao longo do raio é apresentado na Fig.13.1.

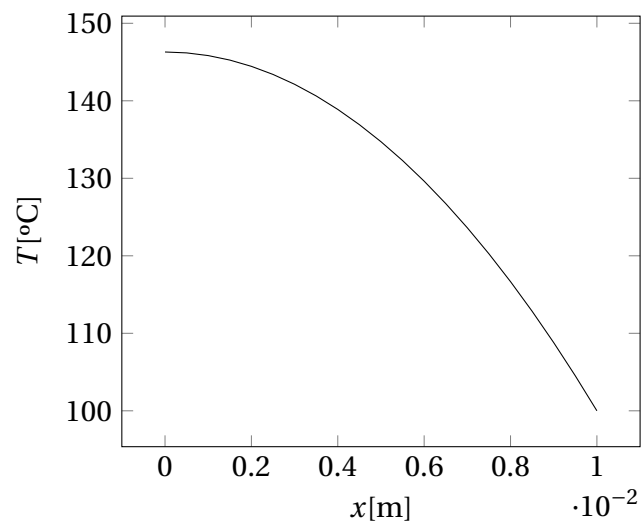


Figura 13.1 – Perfil de temperatura na esfera sólida ao longo do raio

Condução unidimensional permanente em coordenadas esféricas: casca esférica

14.1 Objetivos do Capítulo

- Neste capítulo a equação da difusão será aplicada para problemas de transferência de calor unidimensional em regime permanente em uma casca esférica

Ao final deste capítulo, o aluno deve ser capaz de:

1. Aplicar a equação da difusão nas coordenadas adequadas
2. Aplicar as condições de contorno apropriadas
3. Desenvolver a equação algébrica à partir das condições de contorno

14.2 Casca esférica

Uma casca esférica de material com condutividade K , possui temperatura T_1 em $r = r_1$ e T_2 em $r = r_2$, $r_2 > r_1$. Para regime permanente, determine:

1. Distribuição de temperatura radial $T(r)$
2. Taxa de transferência de calor q através da camada
3. Resistência térmica R_t da camada

A equação da difusão é:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (K \cdot \nabla T) + \dot{q}$$

Em coordenadas esféricas:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(K_r r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(K_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(K_\phi \sin \phi \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \dot{q} \quad (14.1)$$

Adotando as hipóteses simplificadores:

1. Regime permanente: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
Todas as derivadas temporais são nulas
2. Unidimensional na coordenada r (radial)
3. Propriedades constantes
 K pode ser retirado da derivada
4. Sem geração de calor interno

Após duas integrações, conforme Cap.12, obtém-se a Eq.12.7 para o perfil de temperatura em função do raio, repetida abaixo:

$$T(r) = -\frac{\dot{q} \cdot r^2}{6 \cdot K} - \frac{C_1}{r} + C_2 \quad (14.2)$$

Este é um caso sem geração de calor interno, assim:

$$T(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2 \quad (14.3)$$

14.2.1 Aplicação das condições de contorno

São necessárias duas condições de contorno para determinar as constantes de integração. Para o caso em análise, temos:

- Condição de Contorno 1
Temperatura T_1 conhecida na posição $r = r_1$
 $T(r = r_1) = T_1$
- Condição de Contorno 2
Temperatura T_2 conhecida na posição $r = r_2$
 $T(r = r_2) = T_2$

Aplicando as condições de contorno de temperaturas conhecidas:

$$T_1 = -\frac{C_1}{r_1} + C_2 \quad (14.4)$$

$$T_2 = -\frac{C_1}{r_2} + C_2 \quad (14.5)$$

Subtraindo a Eq.14.5 da Eq.14.4:

$$\begin{aligned}
T_1 - T_2 &= \left(-\frac{C_1}{r_1} + C_2 \right) - \left(-\frac{C_1}{r_2} + C_2 \right) \\
T_1 - T_2 &= -\frac{C_1}{r_1} + C_2 + \frac{C_1}{r_2} - C_2 \\
T_1 - T_2 &= \frac{C_1}{r_2} - \frac{C_1}{r_1} \\
T_1 - T_2 &= C_1 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \\
C_1 &= \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)} \tag{14.6}
\end{aligned}$$

A Eq.14.3 se torna:

$$\begin{aligned}
T(r) &= -\frac{C_1}{r} + C_2 \\
T(r) &= -\frac{\frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)}}{r} + C_2 \\
T(r) &= -\frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)} \frac{1}{r} + C_2 \tag{14.7}
\end{aligned}$$

Para obter a constante C_2 pode-se substituir qualquer uma das duas condições de contorno. Para $r = r_1$:

$$\begin{aligned}
T(r) &= -\frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)} \frac{1}{r} + C_2 \\
T_1 &= -\frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)} \frac{1}{r_1} + C_2 \\
C_2 &= T_1 + \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)} \frac{1}{r_1} \tag{14.8}
\end{aligned}$$

Obtidas as constantes de integração C_1 e C_2 , a equação para o perfil de temperatura é:

$$\begin{aligned}
T(r) &= -\frac{C_1}{r} + C_2 \\
T(r) &= -\frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)} \frac{1}{r} + T_1 + \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)} \frac{1}{r_1} \\
T(r) &= T_1 + \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) \tag{14.9}
\end{aligned}$$

Para a taxa de calor, aplicamos a equação de Fourier:

$$q = -K.A.\frac{dT}{dr} \quad (14.10)$$

Em que a área na casca esférica é:

$$A = 4.\pi.r^2 \quad (14.11)$$

Derivando a equação do perfil de temperatura sem geração de calor interno (Eq.14.3):

$$\begin{aligned} T(r) &= -\frac{C_1}{r} + C_2 \\ \frac{dT}{dr} &= \frac{C_1}{r^2} \end{aligned} \quad (14.12)$$

C_1 já foi determinado, logo:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dr} &= \frac{\frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)}}{r^2} \\ \frac{dT}{dr} &= \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)} \frac{1}{r^2} \end{aligned} \quad (14.13)$$

A equação para a taxa de calor é:

$$\begin{aligned} q &= -K.A.\frac{dT}{dr} \\ q &= -K.4.\pi.r^2 \cdot \left[\frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)} \frac{1}{r^2} \right] \\ q &= 4.K.\pi.r^2 \cdot \left[\frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \frac{1}{r^2} \right] \\ q &= 4.K.\pi \cdot \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \end{aligned} \quad (14.14)$$

14.2.2 Resistência térmica à condução

Escrevendo na forma de resistência térmica:

$$\begin{aligned}q &= \frac{\Delta T}{R_T} \\q &= 4.K.\pi. \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \\q &= \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{4.K.\pi}\right)} = \frac{\Delta T}{R_T} \\R_T &= \frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{4.K.\pi}\end{aligned}\tag{14.15}$$

Referências bibliográficas