

# FORMULAÇÃO INTEGRAL DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES

## PARTE 4

### O Teorema de Transporte de Reynolds

[www.cienciastermicas.com](http://www.cienciastermicas.com)

Se inscreva no canal !!

# Sistema

Quantidade arbitrária de matéria de identidade fixa

Tudo externo ao sistema = vizinhança

Fronteira do sistema: separa sistema da vizinhança

Sistema Fechado: não troca massa com a vizinhança: calor e trabalho

Sistema aberto: troca massa com a vizinhança (Volume de Controle)

Quando é fácil acompanhar elementos de massa identificáveis

Método Lagrangiano: acompanha a "partícula"

- 1) Conservação de Massa
- 2) 2ª Lei do Movimento de Newton
- 3) 1ª Lei da Termodinâmica
- 4) 2ª Lei da Termodinâmica

## Leis físicas básicas formuladas para sistema

### 1) Conservação de Massa

massa do sistema (fechado) é conservada

### 2) 2ª Lei do Movimento de Newton

$$\sum \vec{F}_{\text{sist}} = \frac{d}{dt} (m_{\text{sist}} \cdot \vec{V}_{\text{sist}})$$

### 3) 1ª Lei da Termodinâmica

$$\frac{dE_{\text{sist}}}{dt} = \frac{\delta Q}{dt} + \frac{\delta W}{dt}$$

### 4) 2ª Lei da Termodinâmica

$$\frac{dS_{\text{sist}}}{dt} = \oint \frac{\delta \dot{Q}}{T}$$

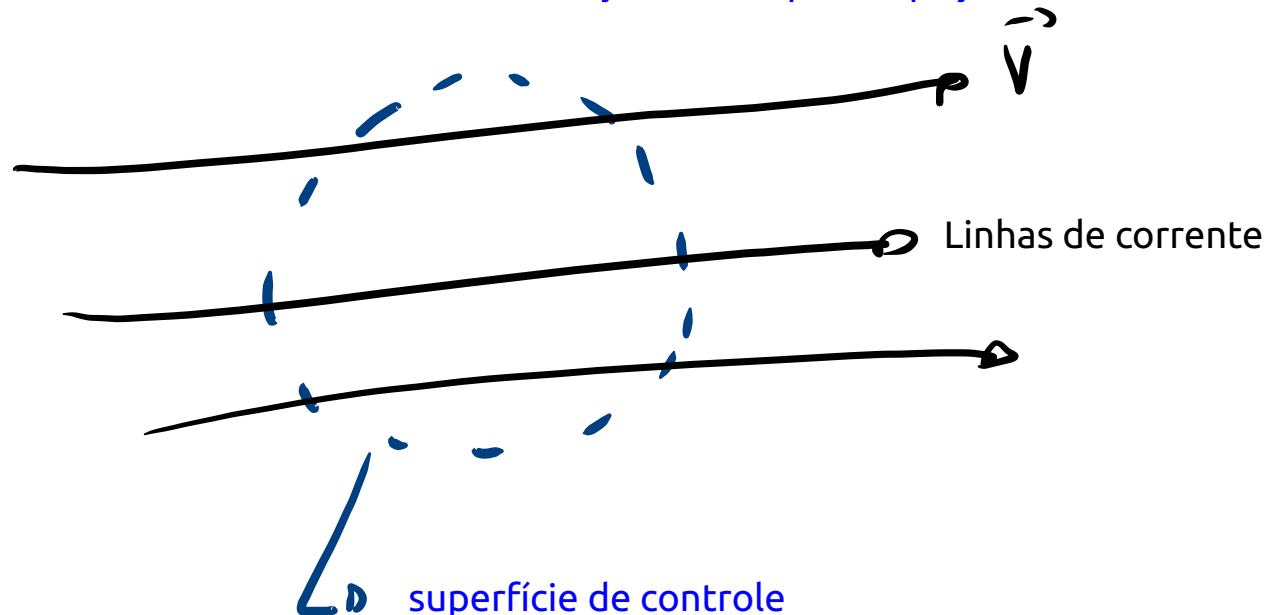
Em fluidos, acompanhar o movimento de cada "partícula" fluida separadamente é difícil  
É mais conveniente observar o que ocorre numa determinada região do espaço com o tempo

### Descrição Euleriana -> Volume de Controle

V.C: volume arbitrário (fixo no espaço) através do qual o fluido escoa (A. Shapiro)

V.C -> pode deformar e movimentar e massa atravessa suas fronteiras

Propriedades do escoamento descritas em função do tempo e espaço





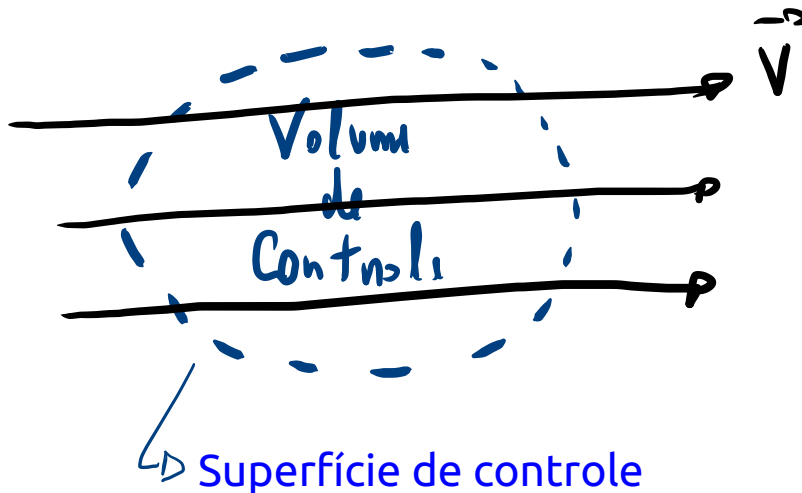
Equações para Sistema



Teorema de Transporte de Reynolds



Equações para Volume de Controle



## Leis Governantes

Taxa de variação de propriedade EXTENSIVA do sistema  
(é proporcional à massa do sistema)

massa, quantidade de movimento, Energia

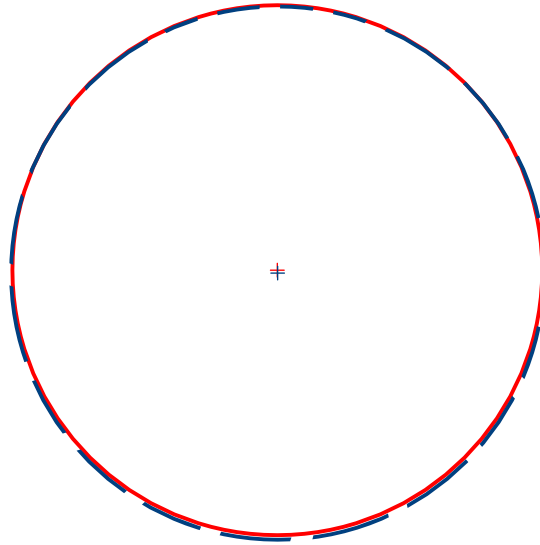
$$B = (m, m.\vec{V}, E)$$

Propriedade Intensiva correspondente: é independente da massa

$$b = (1, \vec{V}, e)$$

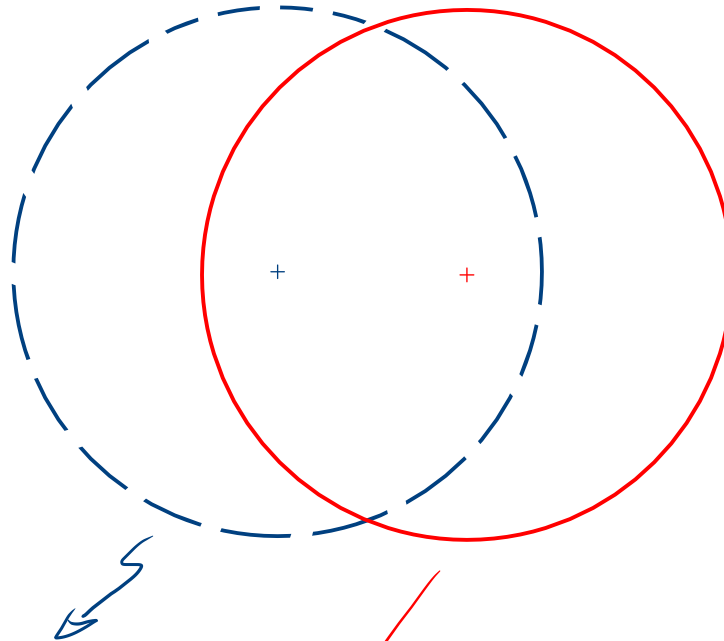
$$B_{\text{Sistema}} = \int_{m_{\text{Sistema}}} b \cdot dm = \int_{t_{\text{Sistema}}} b \cdot g \cdot dt$$

## Lado Direito



No instante  $t$ , o **Sistema** e o **Volume de Controle** coindicem

$$m_{\text{sistema}}.b_{\text{sistema}} = m.b_{\text{vc}}$$

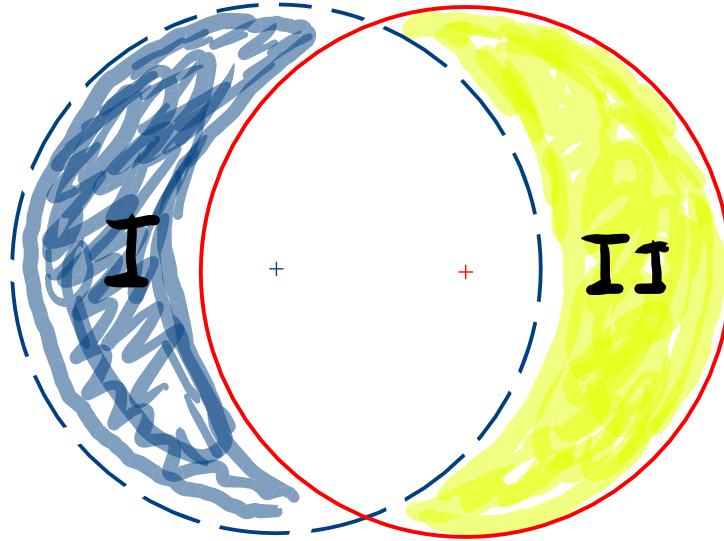


Volume de Controle estacionário

Sistema se movimentou

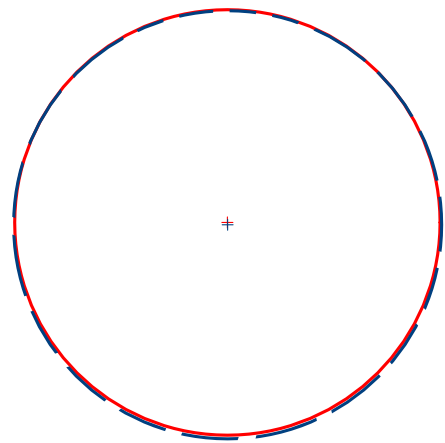


$t + dt$



I: quantidade que entra no V.C através da superfície de controle

II: quantidade que sai do V.C. através da superfície de controle



$$m_s^t = m_{vc}^t$$

$$m_s^t \cdot \vec{V}_s^t = m_{vc}^t \cdot \vec{V}_{vc}^t$$

$$m_s^t \cdot b_s^t = m_{vc}^t \cdot b_{vc}^t$$

$$m_s^{t+dt} = m_{vc}^{t+dt} + m_{II}^{t+dt} - m_I^{t+dt}$$

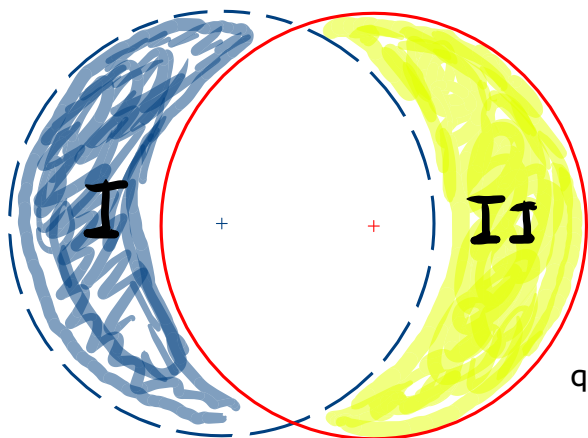
$$m_s \cdot \vec{V}_s \Big|_{t+dt} = m_{vc} \cdot \vec{V}_{vc} \Big|_{t+dt} + m_{II} \cdot \vec{V}_{II} \Big|_{t+dt} - m_I \cdot \vec{V}_I \Big|_{t+dt}$$

$$m_s \cdot b_s \Big|_{t+dt} = m_{vc} \cdot b_{vc} \Big|_{t+dt} + m_{II} \cdot b_{II} \Big|_{t+dt} - m_I \cdot b_I \Big|_{t+dt}$$

quantidade que entra no V.C. no intervalo  $dt$  ↙

quantidade que sai do V.C. no intervalo  $dt$  ↘

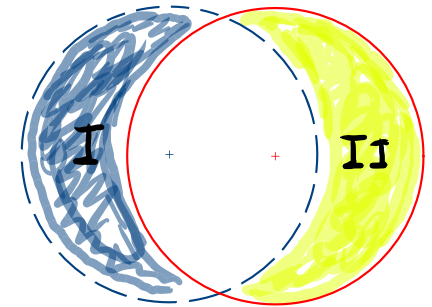
[www.cienciastermicas.com](http://www.cienciastermicas.com)



$$\textcircled{2} \quad \left. m_s \cdot b_s \right|_{t+dt} = \left. m_{vc} \cdot b_{vc} \right|_{t+dt} + \left. m_{II} \cdot b_{II} \right|_{t+dt} - \left. m_I \cdot b_I \right|_{t+dt}$$

$$\textcircled{1} \quad m_s^t \cdot b_s = m_{vc}^t \cdot b_{vc}$$


---



$$\frac{\textcircled{2} - \textcircled{1}}{dt} = \frac{m_s \cdot b_s|_{t+dt} - m_s \cdot b_s|_t}{dt} = \frac{m_{vc} \cdot b_s|_{t+dt} - m_{vc} \cdot b_s|_t}{dt} + \frac{m_{II} \cdot b_{vc}|_{t+dt}}{dt} - \frac{m_I \cdot b_{vc}|_{t+dt}}{dt}$$

Mo limite  $dt \rightarrow 0$

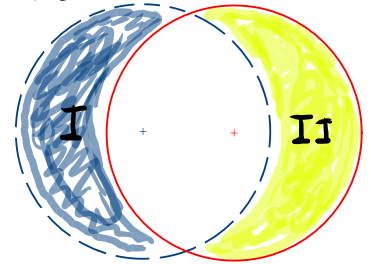
**Sistema e Volume de Controle Coincidem**

$$\frac{m_s \cdot b_s|_{t+dt} - m_s \cdot b_s|_t}{dt} = \frac{m_{vc} \cdot b_{vc}|_{t+dt} - m_{vc} \cdot b_{vc}|_t}{dt} + \frac{m_{II} \cdot b_{II}|_{t+dt}}{dt} - \frac{m_I \cdot b_I|_{t+dt}}{dt}$$

No limite  $dt \rightarrow 0$  Sistema e V.C coincidem

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{m_s \cdot b_s|_{t+dt} - m_s \cdot b_s|_t}{dt} = \frac{D m_s \cdot b_s}{Dt}$$

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{m_{vc} \cdot b_{vc}|_{t+dt} - m_{vc} \cdot b_{vc}|_t}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{m_{vc}} b_{vc} \cdot dm = \frac{d}{dt} \int_{vc} b \cdot (\rho dV)$$

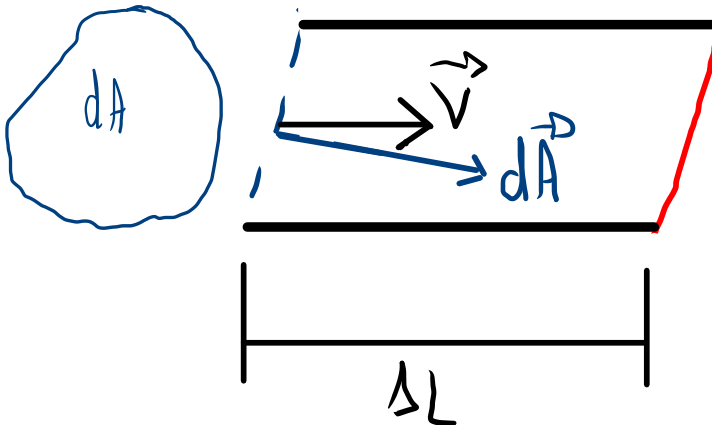
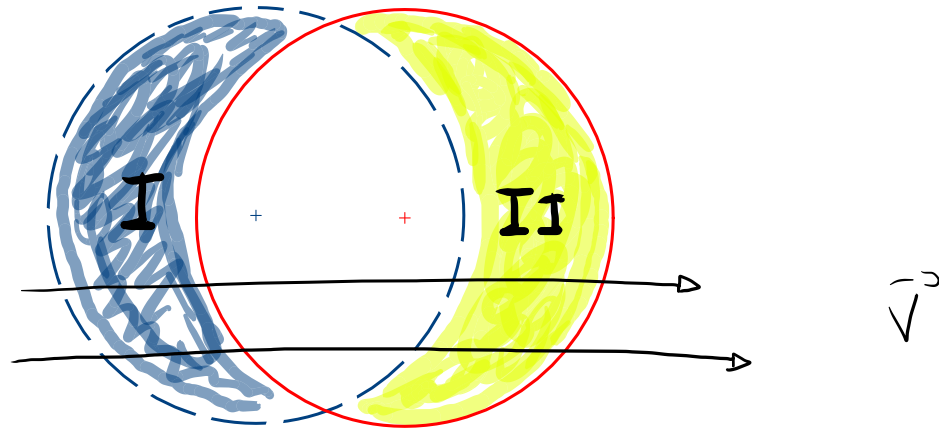


$$\frac{m_{II} \cdot b_{II}|_{t+dt}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_m b_{II} \cdot dm = \frac{d}{dt} \int_{vc} b_{II} (\rho dV)$$

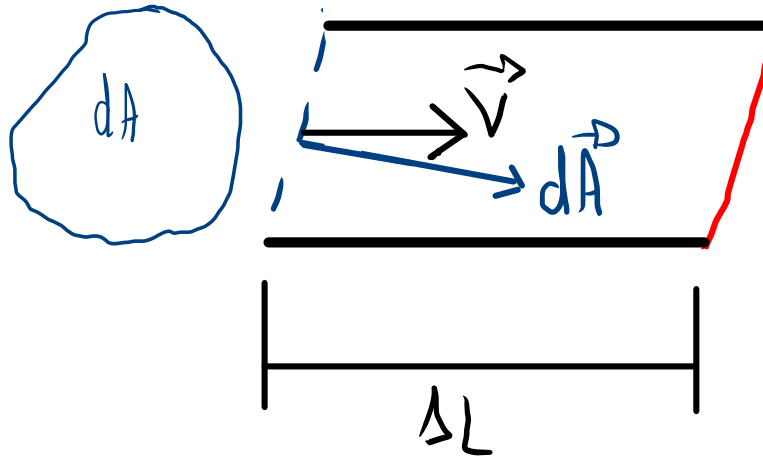
taxa saindo do V.C no intervalo  $dt$

$$\frac{m_I \cdot b_I|_{t+dt}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_m b_I \cdot dm = \frac{d}{dt} \int_{vc} b_I (\rho dV)$$

taxa entrando do V.C no intervalo  $dt$



Volume = Área x Comprimento



O volume é paralelo às linhas de corrente mas a área não necessariamente:  
necessário projetar a área na direção da velocidade

$$d\vec{A} \cos \theta \Rightarrow \text{projetado em } \vec{v}$$

Volume = Área x Comprimento

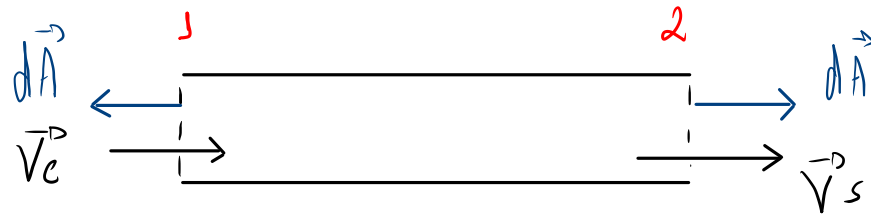
$$dV = d\vec{A} \cos \theta \cdot \Delta L$$

$$dV = d\vec{A} \cos \theta \cdot \Delta L$$

Integral na área!  
↓

$$\frac{m_{II} \cdot b_{II}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_C} b_{II} \cdot \rho \cdot dV = \frac{d}{dt} \int_{SC_S} b_{II} \cdot \rho \cdot d\vec{A} \cdot \cos \theta \cdot \Delta L = \int_{SC_S} b_{II} \left( \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \right)$$

$$\frac{m_I \cdot b_I}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_C} b_I \cdot \rho \cdot dV = \frac{d}{dt} \int_{SC_e} b_I \cdot \rho \cdot d\vec{A} \cdot \cos \theta \cdot \Delta L = \int_{SC_e} b_I \left( \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \right)$$



$$\int_{sc} b. (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) \Rightarrow \vec{V} \cdot d\vec{A} = |\vec{V}| \cdot |d\vec{A}| \cos \Theta$$

L.E L.D

$$\Theta = 180^\circ \Rightarrow \cos \Theta = -1$$

$$\int_{sc} b. (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) < 0$$

$$\Theta = 0^\circ \Rightarrow \cos \Theta = 1$$

$$\int_{sc} b. (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) > 0$$

$$\dot{m}_2 b_2 - \dot{m}_1 b_1 = \oint_{sc} b. (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) \quad \left\{ \begin{array}{l} > 0 \rightarrow \dot{m}_2 b_2 > \dot{m}_1 b_1 \\ < 0 \rightarrow \dot{m}_2 b_2 < \dot{m}_1 b_1 \end{array} \right.$$



$$\frac{D B_s}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_C} b(\rho dV) + \int_{SC} b(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

taxa líquida da propriedade  
Extensiva atravessando (saindo)  
a superfície de controle

taxa de variação da propriedade Extensiva no V.C

taxa de variação da propriedade Extensiva no sistema móvel

\* velocidade do fluido relativa ao V.C

$$\frac{D B_s}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} b (\rho dV) + \int_{SC} b_\rho (\rho \vec{v} \cdot d\vec{A})$$

$$B = (m, m.V, E)$$

$$b = (1, V, e)$$

Continuidade

$$\frac{D(m_s)}{Dt} = 0 = \frac{d}{dt} \int_{VC} 1 (\rho dV) + \int_{SC} 1 (\rho \vec{v} \cdot d\vec{A})$$

2ª Lei de Newton

$$\sum \vec{F}_s = \frac{D(m_s \vec{V}_s)}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \vec{v} (\rho dV) + \int_{SC} \vec{v} (\rho \vec{v} \cdot d\vec{A})$$

Energia

$$\dot{Q} + \dot{W} = \frac{D(E_s)}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} e (\rho dV) + \int_{SC} e (\rho \vec{v} \cdot d\vec{A})$$

$$\frac{D B_s}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} b (\rho dV) + \int_{SC} b \cdot (\rho \vec{v} \cdot d\vec{A})$$

$$B = (m, m.V, E)$$

$$b = (1, V, e)$$

Continuidade

$$\frac{D(m_s)}{Dt} = 0 = \frac{d}{dt} \int_{VC} 1 (\rho dV) + \int_{SC} 1 (\rho \vec{v} \cdot d\vec{A})$$

2ª Lei de Newton

$$\sum \vec{F}_s = \frac{D(m_s \vec{V}_s)}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \vec{V} (\rho dV) + \int_{SC} \vec{V} (\rho \vec{v} \cdot d\vec{A})$$

Energia

$$\dot{Q} + \dot{W} = \frac{D(E_s)}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} e (\rho dV) + \int_{SC} e (\rho \vec{v} \cdot d\vec{A})$$

