FORMULAÇÃO INTEGRAL DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES

PARTE 1

Equação da Continuidade para um Volume de Controle Fixo no espaço

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

www.cienciastermicas.com

Sistema

Quantidade arbitrária de matéria de identidade fixa

Tudo externo ao sistema = vizinhança

Fronteira do sistema: separa sistema da vizinhança

Sistema Fechado: não troca massa com a vizinhança: calor e trabalho

Sistema aberto: troca massa com a vizinhança (Volume de Controle)

Quando é fácil acompanhar elementos de massa identificáveis

Método Lagrangiano: acompanha a "partícula"

1) Conservação de Massa
2) 2ªLei do Movimento de Newton
3) 1ª Lei da Termodinâmica
4) 2ª Lei da Termodinâmica

Leis físicas básicas formuladas para sistema

1) Conservação de Massa

massa do sistema (fechado) é conservada

2) 2ªLei do Movimento de Newton

$$\sum \vec{F}_{sist} = \frac{d}{dt}\left(m_{sist} \cdot \vec{V}_{sist}\right)$$

3) 1ª Lei da Termodinâmica

$$\frac{dE_{sist}}{dt} = \delta\dot{Q} + \delta\dot{W}$$

4) 2ª Lei da Termodinâmica

$$\frac{dS_{sist}}{dt} = \oint \frac{\delta\dot{Q}}{T}$$

Em fluidos, acompanhar o movimento de cada "partícula" fluida separadamente é difícil

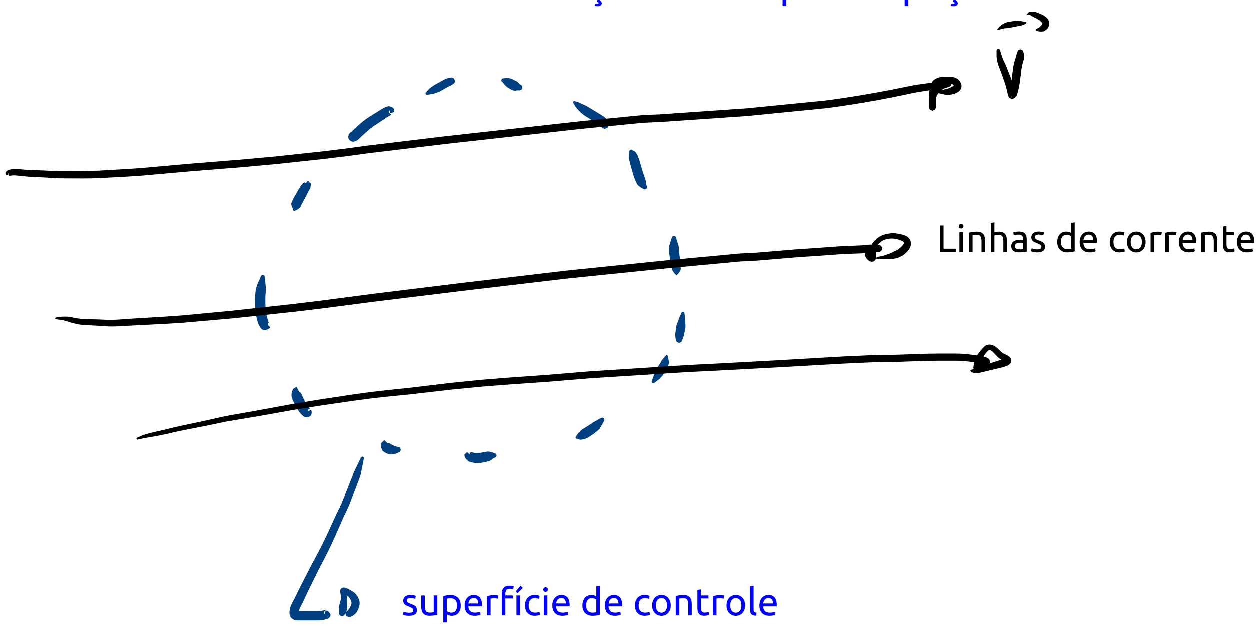
É mais conveniente observar o que ocorre numa determinada região do espaço com o tempo

Descrição Euleriana -> Volume de Controle

V.C: volume arbitrário (fixo no espaço) através do qual o fluido escoa (A. Shapiro)

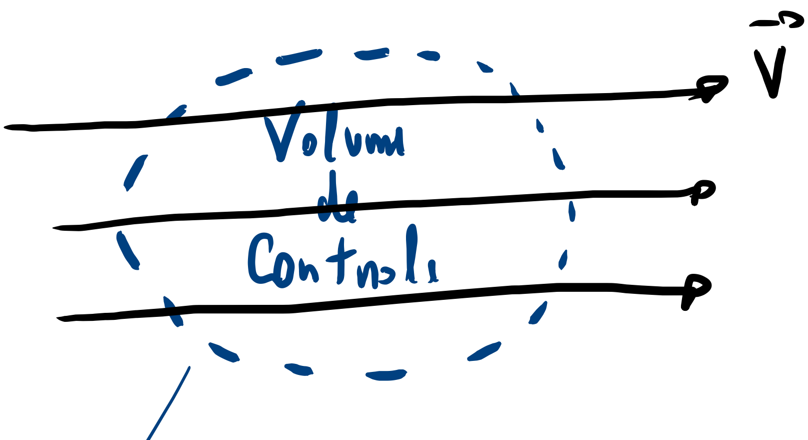
V.C -> pode deformar e movimentar e massa atravessa suas fronteiras

Propriedades do escoamento descritas em função do tempo e espaço



www.cienciastermicas.com

fronteira do sistema



Superfície de controle

Equações para Sistema

Teorema de Transporte de Reynolds

Equações para Volume de Controle

www.cienciastermicas.com

Leis Governantes

Taxa de variação de propriedade EXTENSIVA do sistema

(é proporcional à massa do sistema)

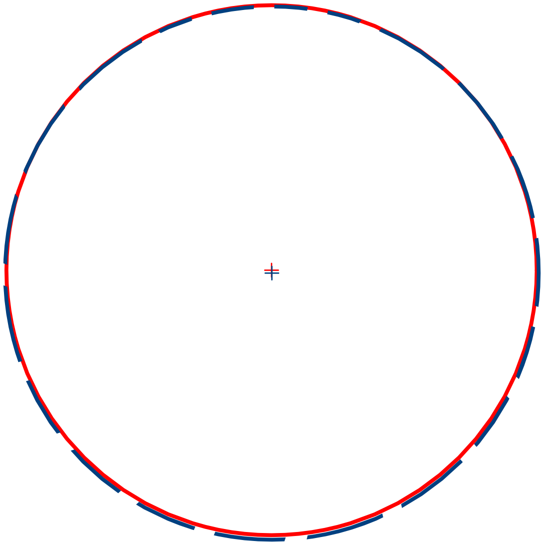
massa, quantidade de movimento, Energia

$B = (m, m.\vec{V}, E)$

Propriedade Intensiva correspondente: é independente da massa

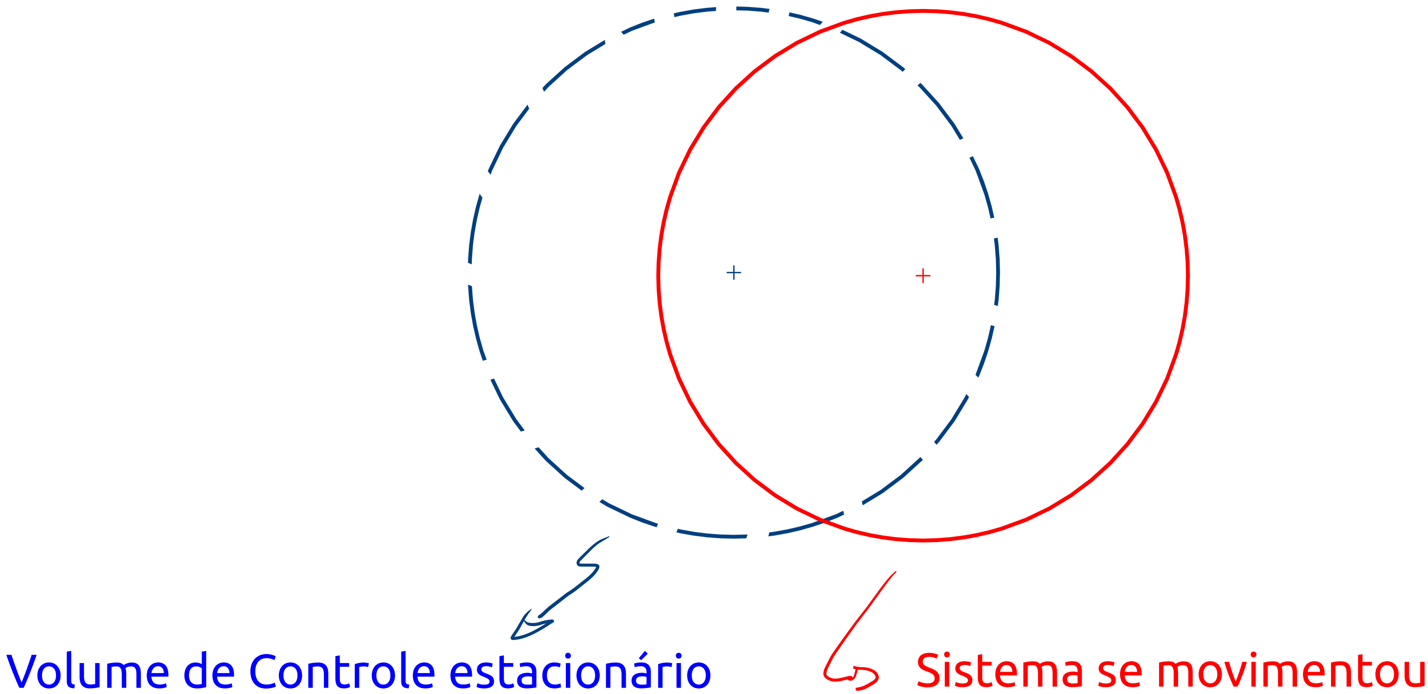
$b = (1, \vec{V}, e)$

$$B_{sistema} = \int_{m_{sistema}} b \cdot dm = \int_{\forall_{sistema}} b \cdot \rho \cdot d\forall$$

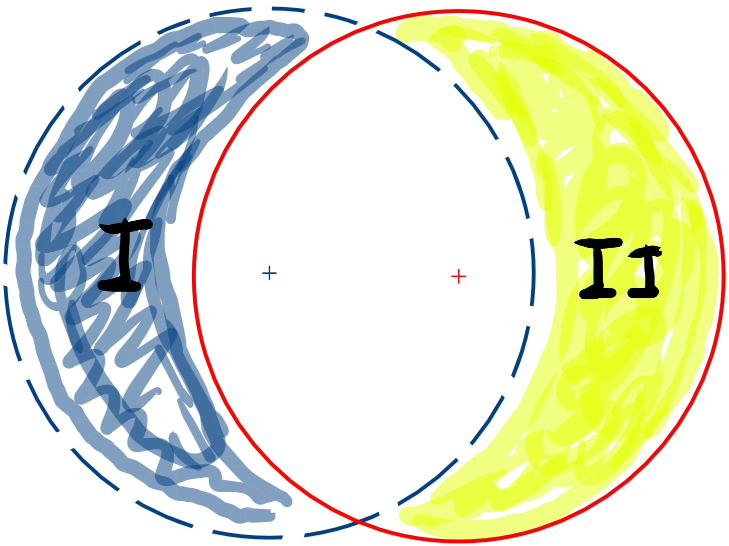


No instante t, o Sistema e o Volume de Controle coincidem

$$m_{sistema} = m_{vc}$$

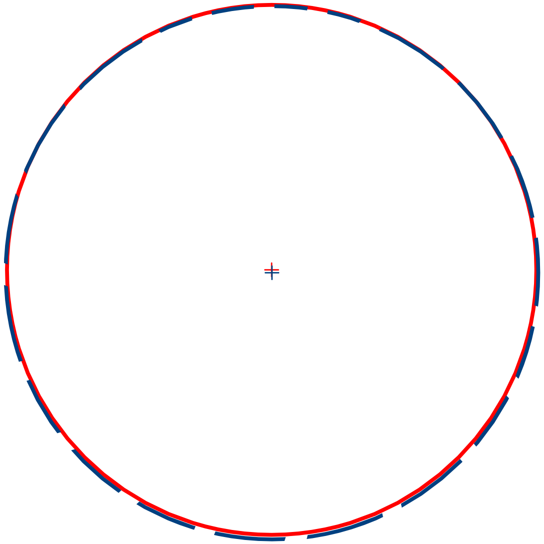

Volume de Controle estacionário
Sistema se movimentou

$t + dt$

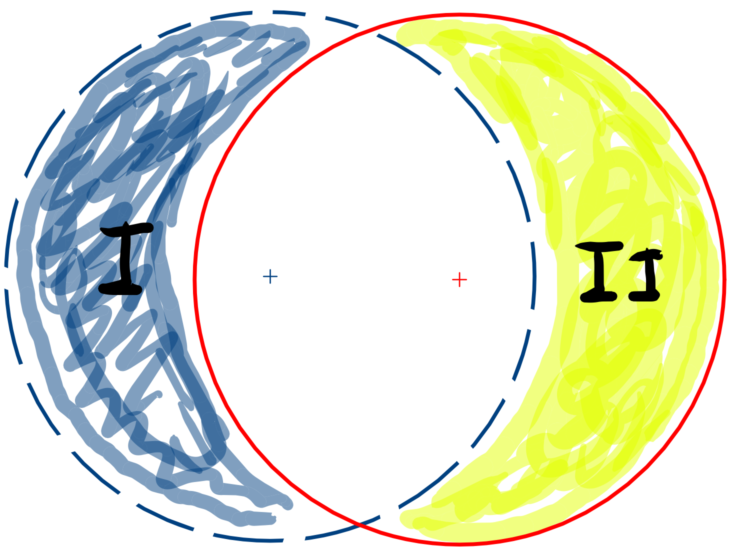


I: massa que entra no V.C através da superfície de controle (para substituir a massa do sistema que saiu)

II: massa que sai do V.C. através da superfície de controle



$$m_s^{t} = m_{vc}^{t}$$



$$m_s^{t+dt} = m_{vc}^{t+dt} + m_{II}^{t+dt} - m_{I}^{t+dt}$$

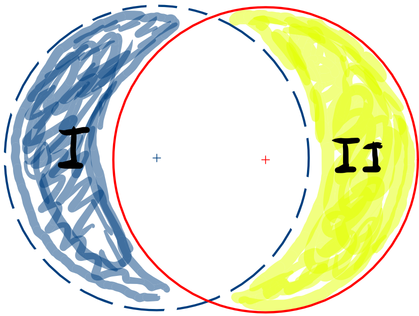
massa que sai do V.C.
no intervalo dT

massa que entra no V.C.
no intervalo dT

www.cienciastermicas.com

$$m_s^{t+dt} = m_{vc}^{t+dt} + m_{II}^{t+dt} - m_{I}^{t+dt}$$

$$m_s^{t} = m_{vc}^{t}$$



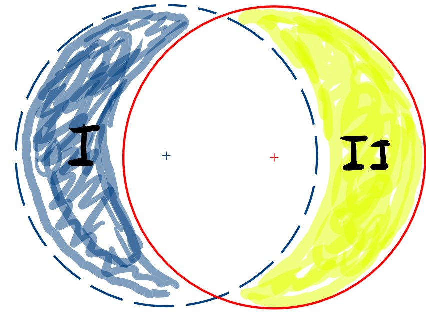
$$m_s^{t+dt} - m_s^{t} = m_{vc}^{t+dt} - m_{vc}^{t} + m_{II}^{t+dt} - m_{I}^{t+dt}$$

$\div\ dt$

$$\frac{m_s^{t+dt} - m_s^{t}}{dt} = \frac{m_{vc}^{t+dt} - m_{vc}^{t}}{dt} + \frac{m_{II}^{t+dt}}{dt} - \frac{m_{I}^{t+dt}}{dt}$$

www.cienciastermicas.com

$$\frac{m_s^{t+dt} - m_s^{t}}{dt} = \frac{m_{VC}^{t+dt} - m_{VC}^{t}}{dt} + \frac{m_{II}^{t+dt}}{dt} - \frac{m_{I}^{t+dt}}{dt}$$



No limite dt -> 0 Sistema e V.C coincidem

$$\lim_{dt \to 0} \frac{m_s^{t+dt} - m_s^{t}}{dt} = \frac{D m_{sist}}{Dt}$$

$$\lim_{dt \to 0} \frac{m_{VC}^{t+dt} - m_{VC}^{t}}{dt} = \frac{\partial m_{VC}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \, d\forall$$

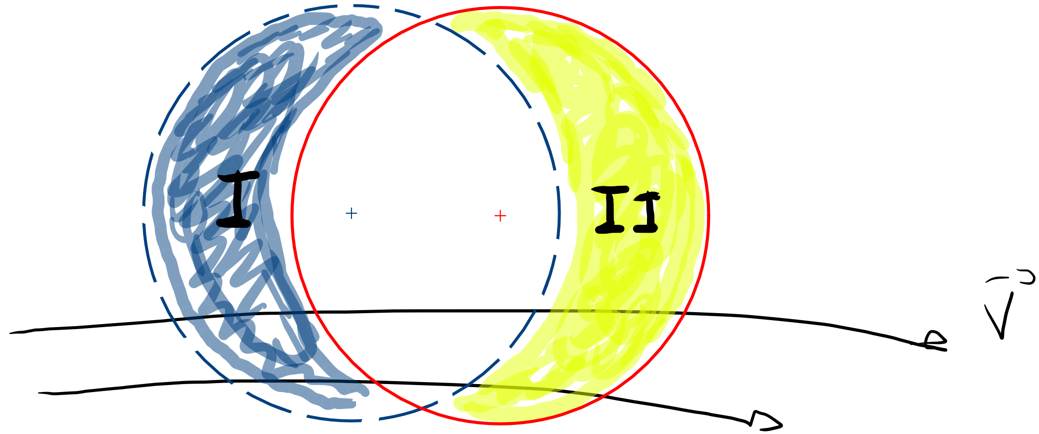
$$\frac{m_{II}^{t+dt}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC_s} \rho \, d\forall$$

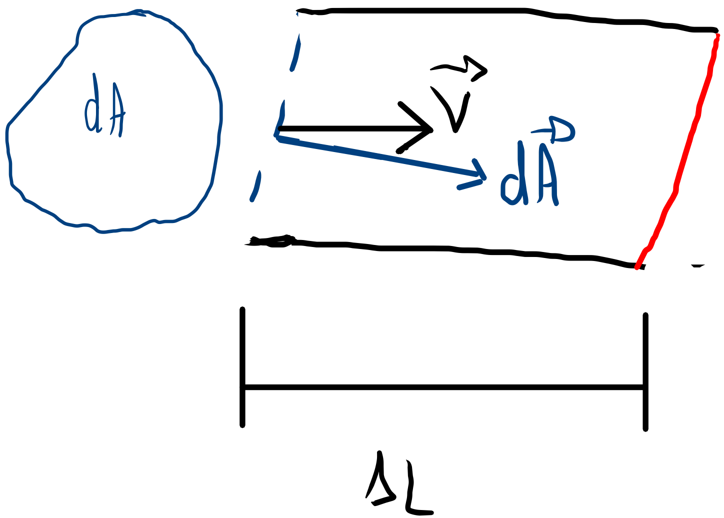
taxa mássica saindo do V.C no intervalo dt

$$\frac{m_{I}^{t+dt}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC_e} \rho \, d\forall$$

taxa mássica entrando do V.C no intervalo dt

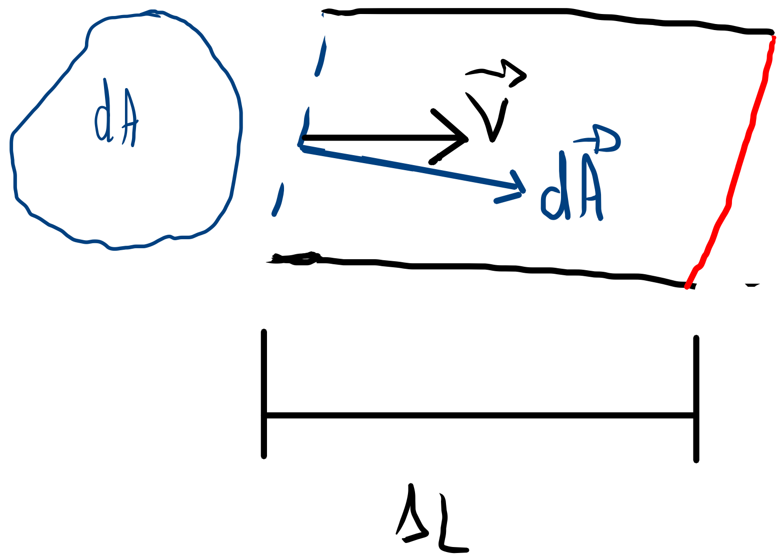
www.cienciastermicas.com





Volume = Área x Comprimento

www.cienciastermicas.com



O volume é paralelo às linhas de corrente mas a área não necessariamente: necessário projetar a área na direção da velocidade

$d\vec{A}\cos\theta \Rightarrow$ projetado em $\vec{V}$

Volume = Área x Comprimento

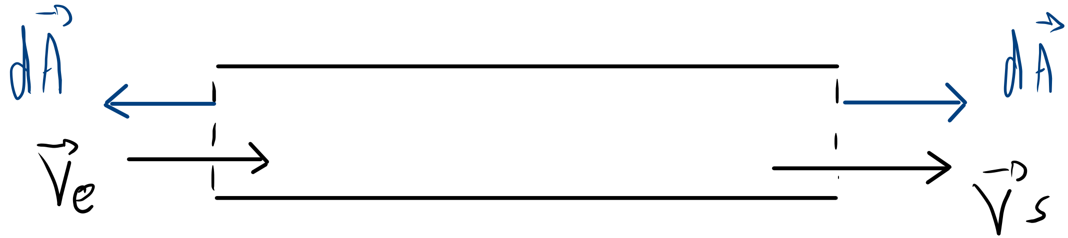
$$d\forall = d\vec{A}\cos\theta \cdot \Delta L$$

www.cienciastermicas.com

$$d\forall = d\vec{A}\cos\theta \cdot \Delta L$$

$$\frac{m_{II}^{t+dt}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC_s} \rho \, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{SC_s} \rho \, d\vec{A}\cos\theta \, \Delta L = \int_{SC_s} \rho \, \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$\frac{m_{I}^{t+dt}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC_e} \rho \, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{SC_e} \rho \, d\vec{A}\cos\theta \, \Delta L = \int_{SC_e} \rho \, \vec{V} \cdot d\vec{A}$$



$$\int_{SC} \rho\, \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad \rightarrow \quad \vec{V} \cdot d\vec{A} = |\vec{V}||d\vec{A}| \cos\theta$$

LE

$$\theta = 180^\circ \Rightarrow \cos\theta = -1$$

$$\int \rho\, \vec{V} \cdot d\vec{A} < 0$$

LD

$$\theta = 0^\circ \Rightarrow \cos\theta = 1$$

$$\int \rho\, \vec{V} \cdot d\vec{A} > 0$$

$$\dot{m}_s - \dot{m}_e = \oint_{SC} \rho\, \vec{V} \cdot d\vec{A} \begin{cases} > 0 & \dot{m}_s > \dot{m}_e \\ < 0 & \dot{m}_s < \dot{m}_e \end{cases}$$

www.cienciastermicas.com

$$\frac{m_s^{t+dt} - m_s^{t}}{dt} = \frac{m_{VC}^{t+dt} - m_{VC}^{t}}{dt} + \frac{m_{II}^{t+dt}}{dt} - \frac{m_{I}^{t+dt}}{dt}$$

$$\frac{D\, m_{sist}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \, d\forall + \oint_{SC} \rho \, \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

taxa líquida de massa atravessando (saindo) através da superfície de controle

taxa de variação de massa no V.C

taxa de variação de massa no sistema móvel

* velocidade do fluido relativa ao V.C

www.cienciastermicas.com

O princípio da Conservação de Massa

Para um sistema de identidade fixa (fechado)

a massa do sistema é constante

$$\cancel{\frac{D m_{sist}}{dt}} = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho \, d\forall + \oint_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{VC} \rho \, d\forall + \oint_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

Equação da Continuidade na formulação integral para um volume de controle fixo no espaço

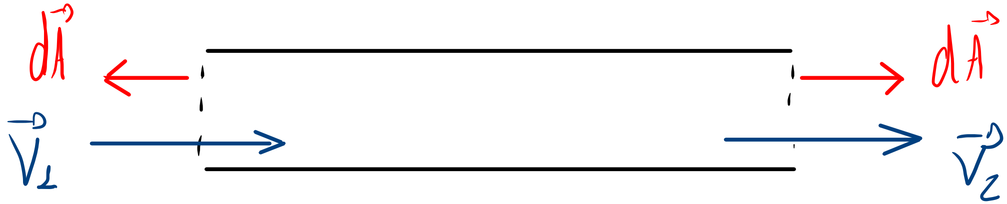
Para regime permanente:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \, d\forall + \oint_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\boxed{\oint_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0}$$

www.cienciastermicas.com

Para regime permanente Unidimensional



$$\oint_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\rho_1 \vec{V_1} \cdot \vec{A_1} + \rho_2 \vec{V_2} \cdot \vec{A_2} = 0$$

$$\vec{V_1} \cdot \vec{A_1} = |\vec{V_1}| . |\vec{A_1}| \cos\theta_1 = -V_1 . A_1$$

$$\vec{V_2} \cdot \vec{A_2} = |\vec{V_2}| |\vec{A_2}| . \cos\theta_2 = +V_2 . A_2$$

$$\therefore -\rho_1 V_1 A_1 + \rho_2 V_2 A_2 = 0$$

$$\boxed{\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2}$$

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$$