

FORMULAÇÃO INTEGRAL DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES

PARTE 3

A Equação da Energia para um Volume de Controle

Ou

1ª Lei da Termodinâmica para um Volume de Controle

Sistema

Quantidade arbitrária de matéria de identidade fixa

Tudo externo ao sistema = vizinhança

Fronteira do sistema: separa sistema da vizinhança

Sistema Fechado: não troca massa com a vizinhança: calor e trabalho

Sistema aberto: troca massa com a vizinhança (Volume de Controle)

Quando é fácil acompanhar elementos de massa identificáveis

Método Lagrangiano: acompanha a "partícula"

- 1) Conservação de Massa
- 2) 2ª Lei do Movimento de Newton
- 3) 1ª Lei da Termodinâmica
- 4) 2ª Lei da Termodinâmica

Leis físicas básicas formuladas para sistema

1) Conservação de Massa

massa do sistema (fechado) é conservada

2) 2ª Lei do Movimento de Newton

$$\sum \vec{F}_{\text{sist}} = \frac{d}{dt} (m_{\text{sist}} \cdot \vec{V}_{\text{sist}})$$

3) 1ª Lei da Termodinâmica

$$\frac{dE_{\text{sist}}}{dt} = \frac{\delta Q}{dt} + \frac{\delta W}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W}{dt}$$

4) 2ª Lei da Termodinâmica

$$\frac{dS_{\text{sist}}}{dt} = \oint \frac{\delta \dot{Q}}{T}$$

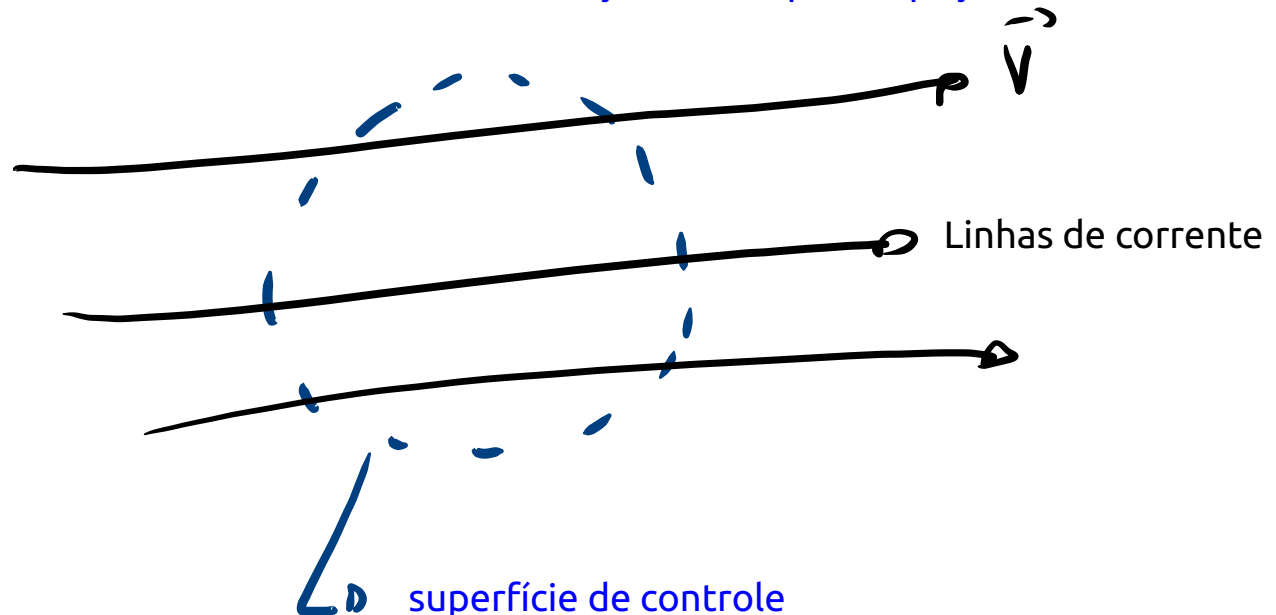
Em fluidos, acompanhar o movimento de cada "partícula" fluida separadamente é difícil
É mais conveniente observar o que ocorre numa determinada região do espaço com o tempo

Descrição Euleriana -> Volume de Controle

V.C: volume arbitrário (fixo no espaço) através do qual o fluido escoa (A. Shapiro)

V.C -> pode deformar e movimentar e massa atravessa suas fronteiras

Propriedades do escoamento descritas em função do tempo e espaço





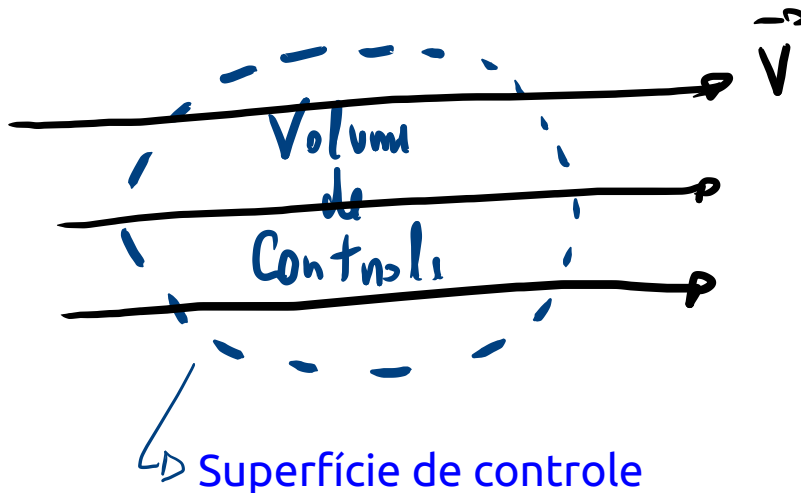
Equações para Sistema



Teorema de Transporte de Reynolds



Equações para Volume de Controle



Leis Governantes

Taxa de variação de propriedade EXTENSIVA do sistema
(é proporcional à massa do sistema)

massa, quantidade de movimento, Energia

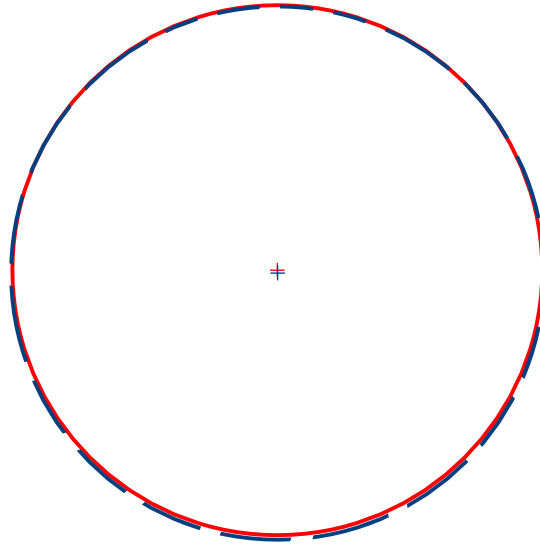
$$B = (m, m.\vec{V}, E)$$

Propriedade Intensiva correspondente: é independente da massa

$$b = (1, \vec{V}, e)$$

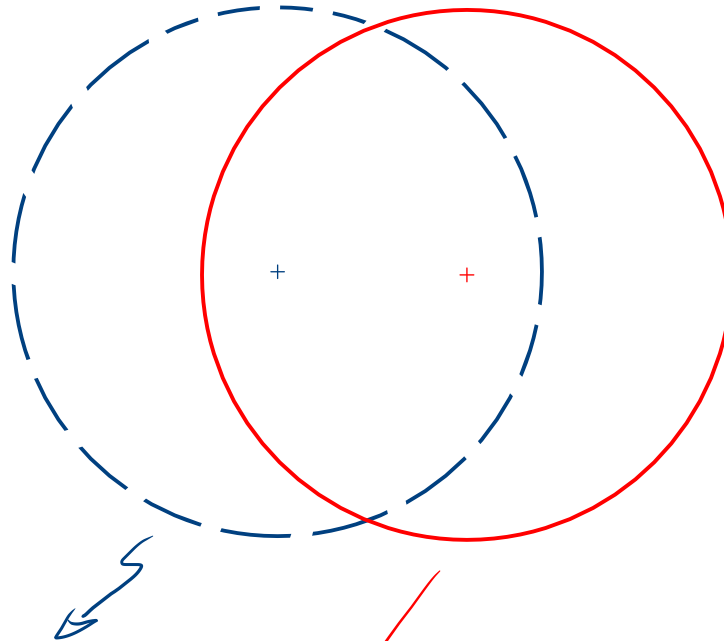
$$B_{\text{Sistema}} = \int_{m_{\text{Sistema}}} b \cdot dm = \int_{t_{\text{Sistema}}} b \cdot \dot{m} \cdot dt$$

Lado Direito



No instante t , o **Sistema** e o **Volume de Controle** coindicem

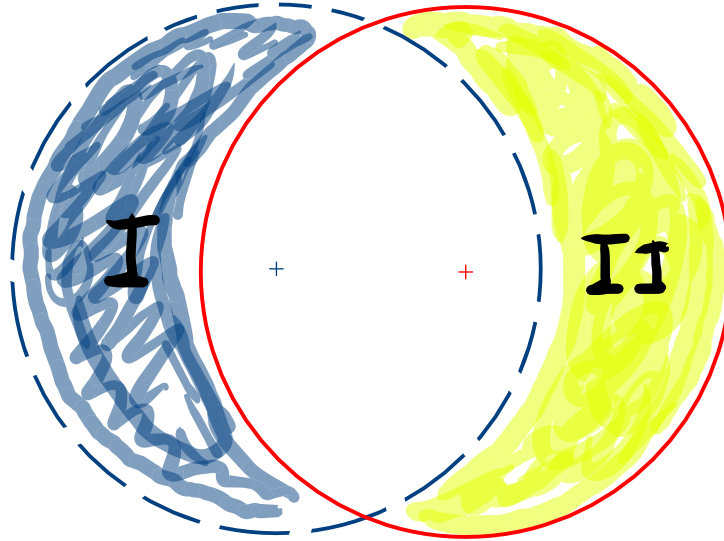
$$m_{\text{sistema}}.e_{\text{sistema}} = m.e_{\text{vc}}$$



Volume de Controle estacionário

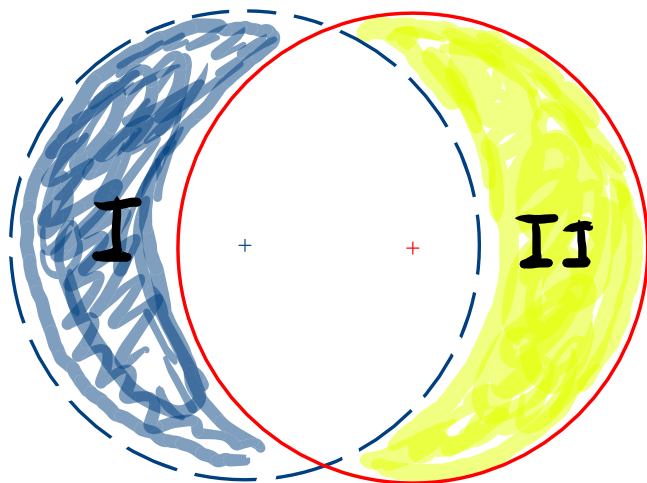
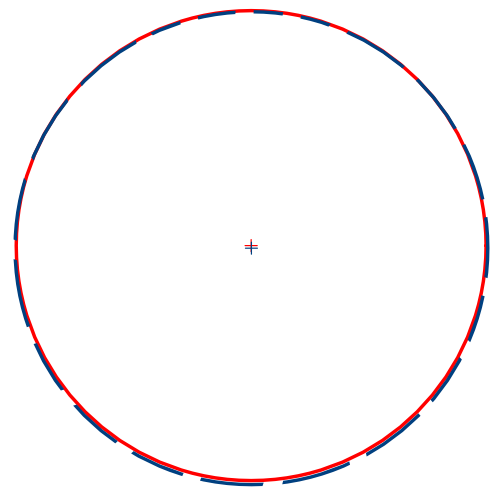
Sistema se movimentou

$t + dt$



I: quantidade que entra no V.C através da superfície de controle

II: quantidade que sai do V.C. através da superfície de controle



$$m_s^t = m_{vc}^t$$

$$m_s^t \cdot \vec{v}_s^t = m_{vc}^t \cdot \vec{v}_{vc}^t$$

$$m_s^t \cdot e_s^t = m_{vc}^t \cdot e_{vc}^t$$

$$m_s^{t+dt} = m_{vc}^{t+dt} + m_{II}^{t+dt} - m_I^{t+dt}$$

$$m_s \cdot \vec{v}_s \Big|_{t+dt} = m_{vc} \cdot \vec{v}_{vc} \Big|_{t+dt} + m_{II} \cdot \vec{v}_{II} \Big|_{t+dt} - m_I \cdot \vec{v}_I \Big|_{t+dt}$$

$$m_s \cdot e_s \Big|_{t+dt} = m_{vc} \cdot e_{vc} \Big|_{t+dt} + m_{II} \cdot e_{II} \Big|_{t+dt} - m_I \cdot e_I \Big|_{t+dt}$$

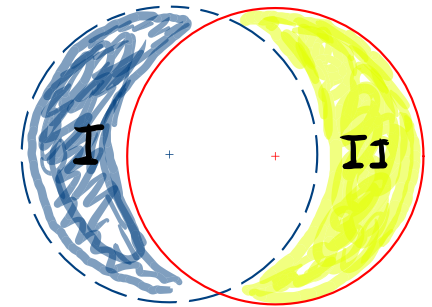
quantidade que sai do V.C. no intervalo dt ↙

quantidade que entra no V.C. no intervalo dt ↘

www.cienciastermicas.com

$$\textcircled{2} \quad \left. m_s \cdot e_s \right|_{t+dt} = \left. m_{vc} \cdot e_{vc} \right|_{t+dt} + \left. m_{II} \cdot e_{II} \right|_{t+dt} - \left. m_I \cdot e_I \right|_{t+dt}$$

$$\textcircled{1} \quad m_s^t \cdot e_s = m_{vc}^t \cdot e_{vc}$$



$$\frac{\textcircled{2} - \textcircled{1}}{dt} = \frac{m_s \cdot e_s|_{t+dt} - m_s \cdot e_s|_t}{dt} = \frac{m_{vc_0} \cdot e_{vc}|_{t+dt} - m_{vc} \cdot e_{vc}|_{t+dt}}{dt} + \frac{m_{II} \cdot e_{II}|_{t+dt}}{dt} - \frac{m_I \cdot e_I|_{t+dt}}{dt}$$

Mo limite $dt \rightarrow 0$

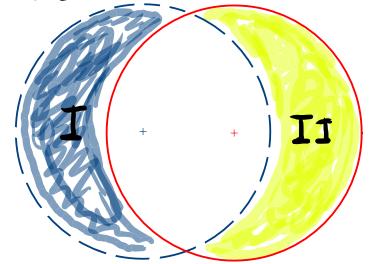
Sistema e Volume de Controle Coincidem

$$\frac{m_s \cdot e_s|_{t+dt} - m_s \cdot e_s|_t}{dt} = \frac{m_{vc} \cdot e_{vc}|_{t+dt} - m_{vc} \cdot e_{vc}|_t}{dt} + \frac{m_{II} \cdot e_{II}|_{t+dt}}{dt} - \frac{m_I \cdot e_I|_{t+dt}}{dt}$$

No limite $dt \rightarrow 0$ Sistema e V.C coincidem

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{m_s \cdot e_s|_{t+dt} - m_s \cdot e_s|_t}{dt} = \frac{D m_s \cdot e_s}{Dt}$$

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{m_{vc} \cdot e_{vc}|_{t+dt} - m_{vc} \cdot e_{vc}|_t}{dt} = \frac{d}{dt} \int_m e \cdot dm = \frac{d}{dt} \int_{vc} (e \cdot \rho dV)$$

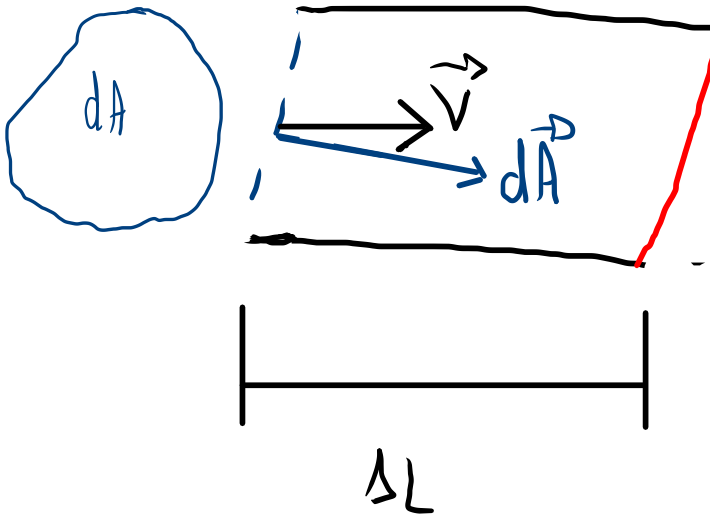
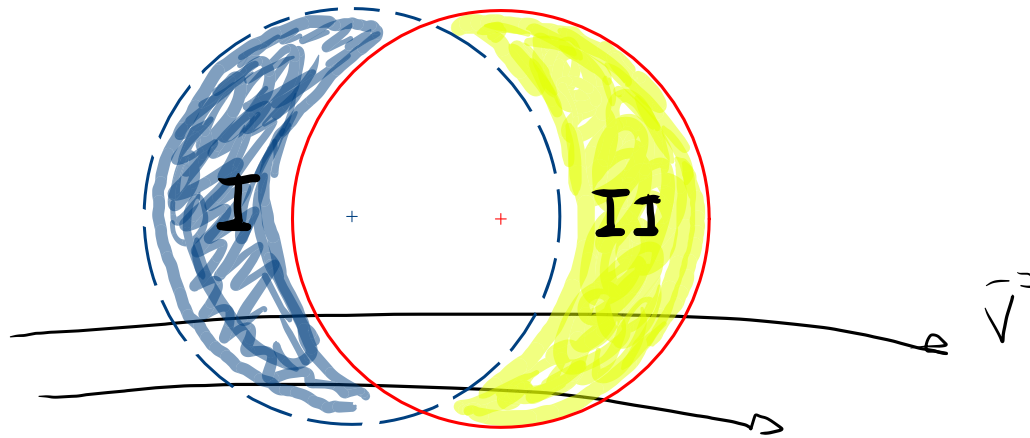


$$\frac{m_{II} \cdot e_{II}|_{t+dt}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_m e_{II} \cdot dm = \frac{d}{dt} \int_{vc} e_{II} (\rho dV)$$

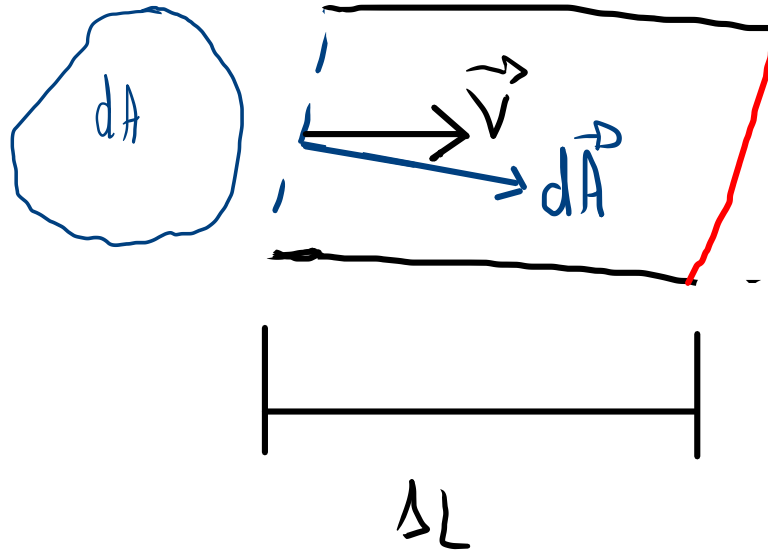
taxa saindo do V.C no intervalo dt

$$\frac{m_I \cdot e_I|_{t+dt}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_m e_I \cdot dm = \frac{d}{dt} \int_{vc} e_I (\rho dV)$$

taxa entrando do V.C no intervalo dt



Volume = Área x Comprimento



O volume é paralelo às linhas de corrente mas a área não necessariamente:
necessário projetar a área na direção da velocidade

$$d\vec{A} \cos \Theta \Rightarrow \text{projetado em } \vec{v}$$

Volume = Área x Comprimento

$$dV = d\vec{A} \cos \Theta \cdot \Delta L$$

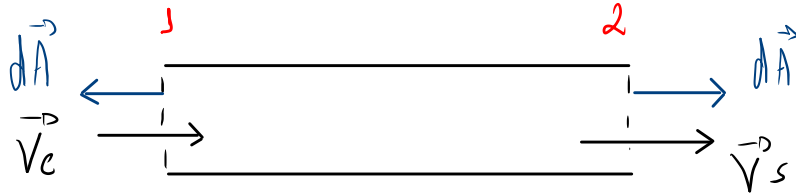
$$dV = d\vec{A} \cos \theta \, \Delta L$$

Integral na área!
↓

$$\frac{m_{II} \cdot c_{II}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_C} c_{II} \cdot \rho \, dV = \frac{d}{dt} \int_{SC_S} c_{II} \cdot \rho \, d\vec{A} \cos \theta \, \Delta L = \int_{SC_S} c_{II} \cdot \rho \, \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$\frac{m_I \cdot c_I}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_C} c_I \cdot \rho \, dV = \frac{d}{dt} \int_{SC_e} c_I \cdot \rho \, d\vec{A} \cos \theta \, \Delta L = \int_{SC_e} c_I \cdot \rho \, \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$\int_{sc} e \cdot (\rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{A}) \Rightarrow \vec{v} \cdot d\vec{A} = |\vec{v}| \cdot |d\vec{A}| \cos \Theta$$



L.E

$$\Theta = 180^\circ \Rightarrow \cos \Theta = -1$$

$$\int_{sc} e \cdot \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} < 0$$

$$\dot{m}_2 \cdot c_2 - \dot{m}_1 \cdot c_1 = \oint_{sc} e \cdot \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

L.D

$$\Theta = 0 \Rightarrow \cos \Theta = 1$$

$$\int_{sc} e \cdot \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} > 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} > 0 \rightarrow \dot{m}_2 c_2 > \dot{m}_1 c_1 \\ < 0 \rightarrow \dot{m}_2 c_1 < \dot{m}_1 c_1 \end{array} \right.$$

$$\frac{DE_s}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_C} e (\rho dV) + \int_{SC} e_s (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

taxa líquida da propriedade Extensiva atravessando (saindo) a superfície de controle

taxa de variação da propriedade Extensiva no V.C

taxa de variação da propriedade Extensiva no sistema móvel

* velocidade do fluido relativa ao V.C

$$\frac{D E_s}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} e (g d\psi) + \int_{sc} e (g \vec{v} \cdot d\vec{A})$$

$$B = (m, m.V, E)$$

$$b = (1, V, e)$$

1ª Lei da Termodinâmica

$$\dot{Q} + \dot{W} = \frac{D(E_s)}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} e (g d\psi) + \int_{sc} e (g \vec{v} \cdot d\vec{A})$$

ENERGIA

$$E = U + E_k + E_p$$

U: energia interna -> Térmica, atômica e Química

E_k : cinética

E_p : potencial

$$\frac{DE}{Dt} = \int_{VC} \dot{e} (\rho \cdot dV) + \int_{SC} \dot{e} (\rho \vec{v} \cdot d\vec{A}) = \frac{\delta Q}{dt} + \frac{\delta W}{dt}$$

Taxa de CALOR

$$\dot{Q} = m \cdot \dot{q} = \int_{VC} \dot{q} \rho dV$$

Taxa de Trabalho

$$W = \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

$$\dot{W} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{ds}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

FORÇAS

Forças de Corpo

- *proporcionais à massa ou ao volume

- atuam à distância -> campos de força

Ex. atração gravitacional, forças magnéticas, eletrodinâmicas

Para sistemas em aceleração: forças inerciais -> inerciais e centrífugas

 $\vec{f}$ (força de corpo por unidade de massa)

$$\vec{F}_c = m_{\text{sistema}} \cdot \vec{f}$$

Forças de Superfície -> Exercidas na superfície

- *tensões normais

 - > força devido à pressão

- *de cisalhamento

 - > forças viscosas

 - > tensão superficial

Forças de corpo

$\vec{f}$ (força de corpo por unidade de massa)

$$\vec{F}_C = m_{\text{sistema}} \cdot \vec{f}$$

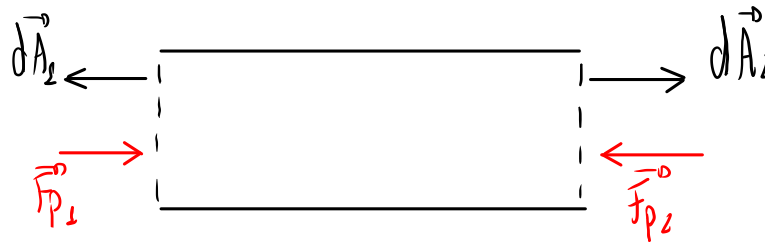
Para $dt \rightarrow 0$: massa do sistema = massa do V.C

$$\vec{F}_C = \int_{V_C} \rho dV \cdot \vec{f} = \int_{V_C} \vec{f} (\rho dV)$$

Forças de superfície

*Força devido à pressão
atuam sempre comprimindo

$$p = \frac{F}{A} \quad \leadsto \quad \vec{F} = p \cdot \vec{A}$$



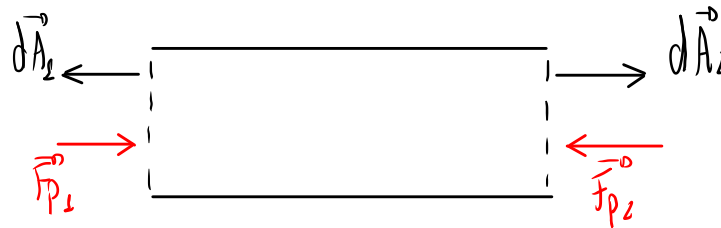
$$\left. \begin{array}{l} p \cdot d\vec{A}_1 < 0 \\ \vec{F}_{p1} > 0 \end{array} \right\} \vec{F}_p = - \int_{A_1} p d\vec{A}$$

$$\left. \begin{array}{l} p \cdot d\vec{A}_2 > 0 \\ \vec{F}_{p2} < 0 \end{array} \right\} \vec{F}_p = - \int_{A_2} p \cdot d\vec{A}$$

Forças de superfície

*Força devido à pressão
atuam sempre comprimindo

$$\vec{F} = p \cdot \vec{A}$$



$$\left. \begin{array}{l} p \cdot d\vec{A}_1 < 0 \\ \vec{F}_{p1} > 0 \end{array} \right\} \vec{F}_p = - \int_{A_1} p d\vec{A}$$

$$\left. \begin{array}{l} p \cdot d\vec{A}_2 > 0 \\ \vec{F}_{p2} < 0 \end{array} \right\} \vec{F}_p = - \int_{A_2} p \cdot d\vec{A}$$

$$\boxed{\vec{F}_p = - \oint_{sc} p \cdot d\vec{A}}$$

Forças

$$\vec{F}_c = \int_{V_c} \rho dV \cdot \vec{f} = \int_{V_c} \rho \vec{f} dV$$

$$\vec{F}_p = - \int_{S_c} p d\vec{A}$$

+ forças viscosas

FORÇAS

$$\sum \vec{F}_{\text{sist}} = \int_{Vc} \rho \vec{f} dV - \int_{Sc} p \cdot d\vec{A} + \text{forças viscosas}$$

Taxa de Trabalho

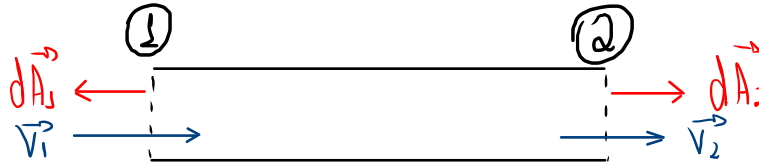
$$\dot{W} = \vec{F} \cdot \vec{V} = \int_{Vc} \rho \vec{f} \cdot \vec{V} dV - \int_{Sc} p \cdot \vec{V} \cdot d\vec{A} + \dot{W}_{\text{visc}} + \dot{W}_{\text{Eixo}}$$

Equação da Energia

$$\frac{DE_s}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_C} e (\rho dV) + \int_{S_C} e (\rho \vec{v} \cdot d\vec{A}) = \int_{V_C} \dot{q} (\rho dV) + \int_{V_C} \vec{J}_c \cdot \vec{v} (\rho dV) - \int_{S_C} p \cdot \vec{v} d\vec{A} + \dot{W}$$

Equação da Energia

força de corpo = gravidade; Sem forças viscosas; Unidimensional



$$\frac{DE_s}{Dt} = \frac{1}{dt} \int_{VC} e (\rho dV) + \int_{SC} e (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) = \int_{VC} \dot{Q} (\rho dV) + \int_{VC} \vec{J}_c \cdot \vec{V} (\rho dV) - \int_{SC} p \cdot \vec{V} d\vec{A} + \dot{W}$$

$$\frac{dE_{VC}}{dt} + e_1 \rho_1 \vec{V}_1 \cdot \vec{A}_1 + e_2 \rho_2 \vec{V}_2 \cdot \vec{A}_2 = \dot{Q} + \cancel{\rho \vec{V} \cdot \vec{V}} - [\rho_1 \vec{V}_1 \cdot \vec{A}_1 + \rho_2 \vec{V}_2 \cdot \vec{A}_2] + \dot{W}$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{A}_1 = V_1 A_1 \cos 180^\circ = -V_1 A_1$$

$$\vec{V}_2 \cdot \vec{A}_2 = V_2 A_2 \cos 0^\circ = +V_2 A_2$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{A}_1 = V_1 A_1 \cos 180^\circ = -V_1 A_1$$

$$\vec{V}_2 \cdot \vec{A}_2 = V_2 A_2 \cos 0^\circ = +V_2 A_2$$

$$\frac{dE_{vc}}{dt} + c_1 \rho_1 \underbrace{\vec{V}_1 \cdot \vec{A}_1}_{(-)} + c_2 \rho_2 \underbrace{\vec{V}_2 \cdot \vec{A}_2}_{(+)} = \dot{Q} + \cancel{\rho \vec{g} \cdot \vec{V}} - \left[\rho_1 \underbrace{\vec{V}_1 \cdot \vec{A}_1}_{(-)} + \rho_2 \underbrace{\vec{V}_2 \cdot \vec{A}_2}_{(+)} \right] + \dot{W}$$

$$\frac{dE_{vc}}{dt} - c_1 \rho_1 V_1 A_1 + c_2 \rho_2 V_2 A_2 = \dot{Q} + \cancel{\rho \vec{g} \cdot \vec{V}} + \rho_1 V_1 A_1 - \rho_2 V_2 A_2 + \dot{W}$$

$$\frac{dE_{vc}}{dt} - \dot{m}_1 c_1 + \dot{m}_2 c_2 = \dot{Q} + \dot{W} + \rho_1 V_1 A_1 - \rho_2 V_2 A_2$$

$$\boxed{\frac{dE_{vc}}{dt} + \dot{m}_2 c_2 + \rho_2 (A_2 V_2) - \dot{m}_1 c_1 - \rho_1 (A_1 V_1) = \dot{Q} + \dot{W}}$$

$$\cancel{\frac{dE_{vc}}{dt}} + \dot{m}_2 e_2 + P_2 (A_2 V_2) - \dot{m}_1 e_1 - P_1 (A_1 V_1) = \dot{Q} + \dot{W}$$

Regime Permanente: $\frac{d}{dt} = 0$; $\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 = \dot{m}$

$$e_2 + P_2 \frac{(A_2 V_2)}{\rho_2 V_2 A_2} - e_1 - \frac{P_1 (A_1 V_1)}{\rho_1 V_1 A_1} = \frac{\dot{Q}}{\dot{m}} + \frac{\dot{W}}{\dot{m}}$$

$$e_2 + \frac{P_2}{\rho_2} - e_1 - \frac{P_1}{\rho_1} = q + w$$

$$\cancel{\phi} \quad u_2 + P_2 v_2 + \frac{V_2^2}{2} + g z_2 - u_1 - P_1 v_1 - \frac{V_1^2}{2} - g z_1 = q + w$$

$$h \equiv u + P \cdot v \quad h_2 + \frac{V_2^2}{2} + g z_2 - h_1 - \frac{V_1^2}{2} + g z_1 = q + w$$

$$\Delta h + \Delta e_k + \Delta e_p = q + w$$

