FORMULAÇÃO INTEGRAL DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES

PARTE 2

Equação da Quantidade de movimento linear para um Volume de Controle Fixo no espaço

$$\int_{VC} \rho \vec{f}\, d\forall - \int_{SC} p\, d\vec{A} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} (\rho\, d\forall) \cdot \vec{V} + \oint_{SC} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) \vec{V}$$

$+$ forças viscosas

Sistema

Quantidade arbitrária de matéria de identidade fixa

Tudo externo ao sistema = vizinhança

Fronteira do sistema: separa sistema da vizinhança

Sistema Fechado: não troca massa com a vizinhança: calor e trabalho

Sistema aberto: troca massa com a vizinhança (Volume de Controle)

Quando é fácil acompanhar elementos de massa identificáveis

Método Lagrangiano: acompanha a "partícula"

1) Conservação de Massa
2) 2ªLei do Movimento de Newton
3) 1ª Lei da Termodinâmica
4) 2ª Lei da Termodinâmica

Leis físicas básicas formuladas para sistema

1) Conservação de Massa

massa do sistema (fechado) é conservada

2) 2ªLei do Movimento de Newton

$$\sum \vec{F}_{sist} = \frac{d}{dt}\left(m_{sist} \cdot \vec{V}_{sist}\right)$$

3) 1ª Lei da Termodinâmica

$$\frac{dE_{sist}}{dt} = \delta \dot{Q} + \delta \dot{W}$$

4) 2ª Lei da Termodinâmica

$$\frac{dS_{sist}}{dt} = \oint \frac{\delta \dot{Q}}{T}$$

www.cienciastermicas.com

Em fluidos, acompanhar o movimento de cada "partícula" fluida separadamente é difícil

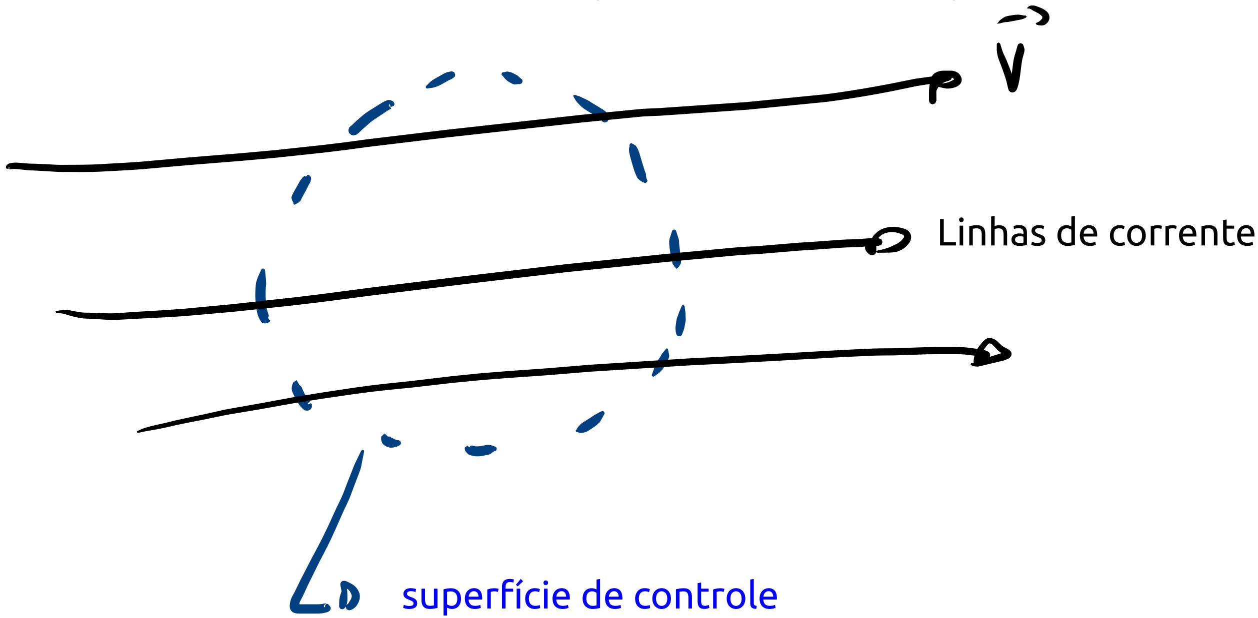
É mais conveniente observar o que ocorre numa determinada região do espaço com o tempo

Descrição Euleriana -> Volume de Controle

V.C: volume arbitrário (fixo no espaço) através do qual o fluido escoa (A. Shapiro)

V.C -> pode deformar e movimentar e massa atravessa suas fronteiras

Propriedades do escoamento descritas em função do tempo e espaço



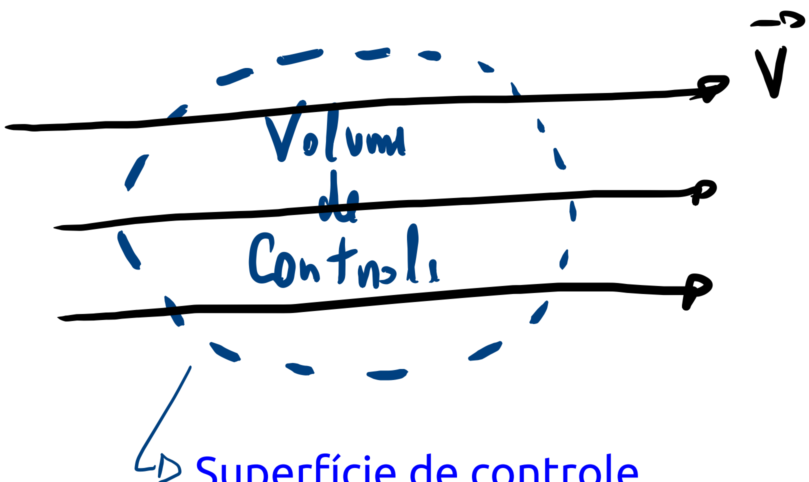
www.cienciastermicas.com

fronteira do sistema

Equações para Sistema

Teorema de Transporte de Reynolds

Equações para Volume de Controle



Superfície de controle

www.cienciastermicas.com

Leis Governantes

Taxa de variação de propriedade EXTENSIVA do sistema

(é proporcional à massa do sistema)

massa, quantidade de movimento, Energia

$B = (m, m.\vec{V}, E)$

Propriedade Intensiva correspondente: é independente da massa

$b = (1, \vec{V}, e)$

$$B_{sistema} = \int_{m_{sistema}} b.\,dm = \int_{\forall_{sistema}} b.\rho.\,d\forall$$

www.cienciastermicas.com

Leis físicas básicas formuladas para sistema

2ªLei do Movimento de Newton

$$\sum \vec{F}_{sist} = \frac{d}{dt}\left(m_{sist} \cdot \vec{V}_{sist}\right)$$

Forças de Corpo

Atuam à distância

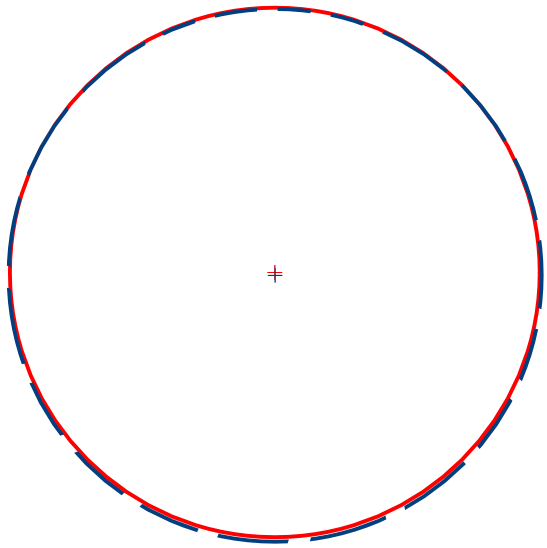
Ex: gravidade; forças eletromagnéticas

Forças de Superfície

Atuam no contato

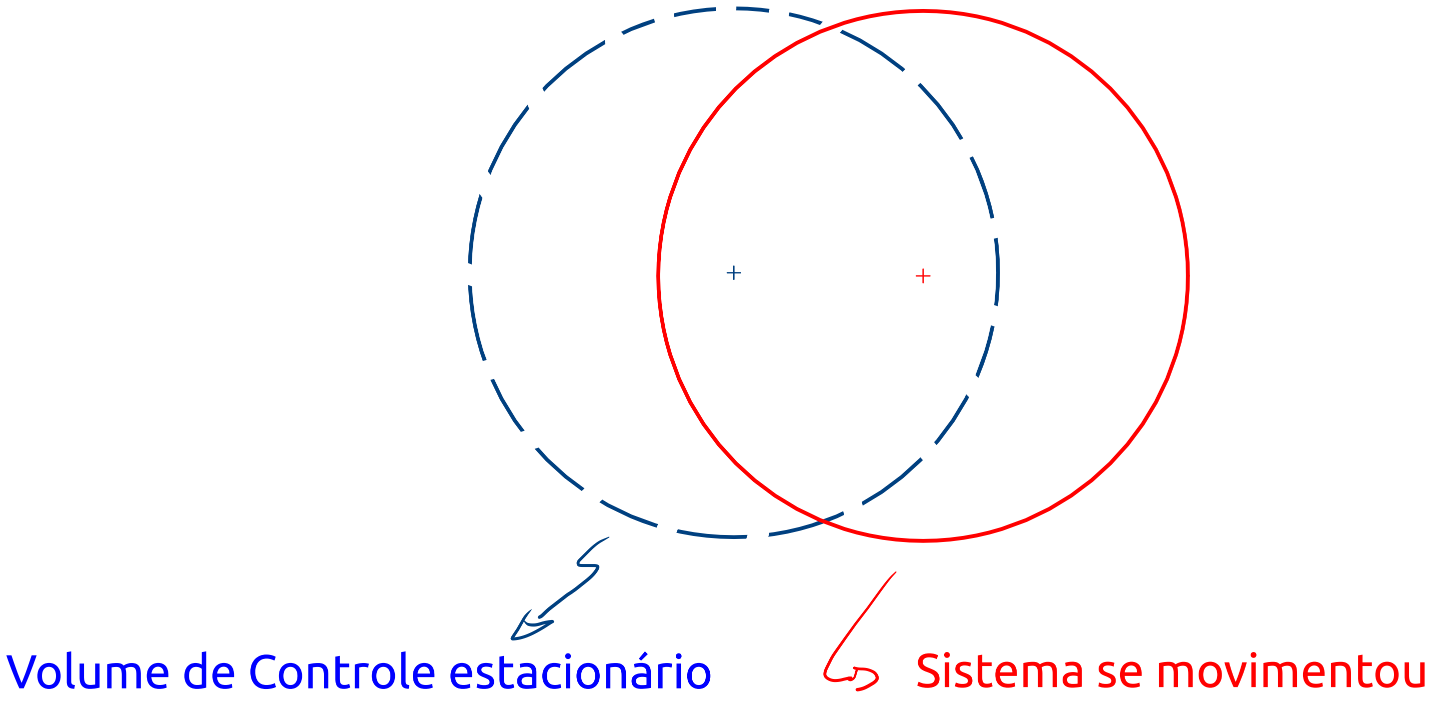
Ex: pressão; tensão de cisalhamento

Lado Direito

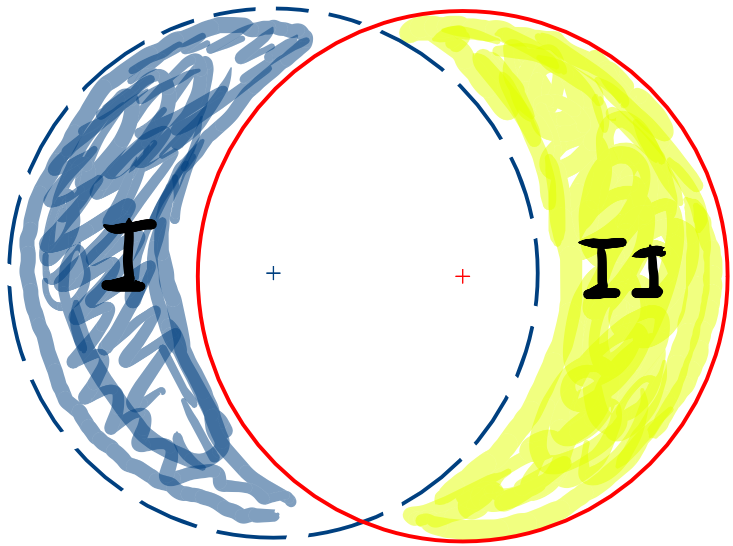


No instante t, o Sistema e o Volume de Controle coincidem

$$m_{sistema}.\vec{V}_{sistema} = m_{VC}.\vec{V}_{VC}$$

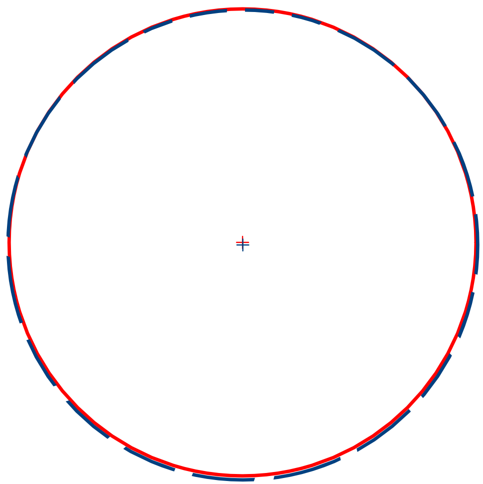

Volume de Controle estacionário
Sistema se movimentou

$t + dt$



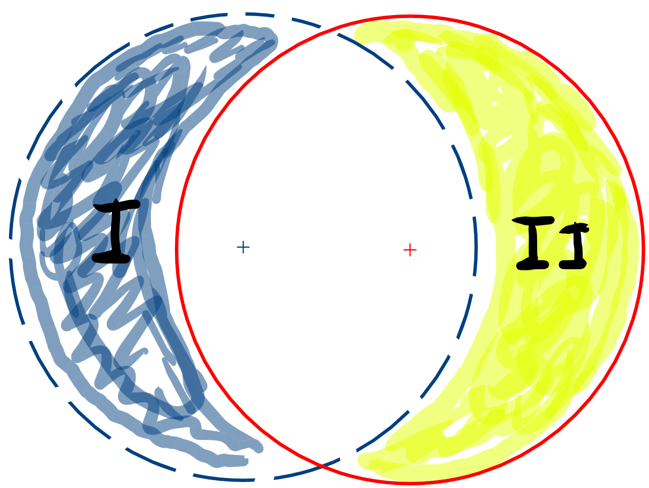
I: quantidade de movimento que entra no V.C através da superfície de controle (para substituir a massa do sistema que saiu)

II: quantidade de movimento que sai do V.C. através da superfície de controle



$$m_s^t = m_{vc}^t$$

$$m_s^t \cdot \vec{V}_s^t = m_{vc}^t \cdot \vec{V}_{vc}^t$$



$$m_s^{t+dt} = m_{vc}^{t+dt} + m_{II}^{t+dt} - m_I^{t+dt}$$

$$m_s \cdot \vec{V}_s \Big|_{t+dt} = m_{vc} \cdot \vec{V}_{vc} \Big|_{t+dt} + m_{II} \cdot \vec{V}_{II} \Big|_{t+dt} - m_I \vec{V}_I \Big|_{t+dt}$$

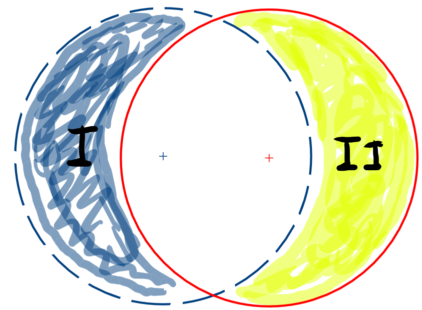
quantidade de movimento que sai do V.C.
no intervalo dT

quantidade de movimento que entra no V.C.
no intervalo dT

www.cienciastermicas.com

$$② \quad m_s \cdot \vec{V}_s \Big|_{t+dt} = m_{vc} \cdot \vec{V}_{vc} \Big|_{t+dt} + m_{II} \cdot \vec{V}_{II} \Big|_{t+dt} - m_I \, V_I \Big|_{t+dt}$$

$$① \quad m_s^t \cdot \vec{V}_s^t = m_{vc}^t \cdot \vec{V}_{vc}^t$$



$$\frac{② - ①}{dt} = \frac{m_s \cdot \vec{V}_s \big|_{t+dt} - m_s \vec{V}_s \big|_t}{dt} = \frac{m_{vc} \vec{V}_{vc} \big|_{t+dt} - m_{vc} \vec{V}_{vc} \big|_{t+dt}}{dt} + \frac{m_{II} \vec{V}_{II} \big|_{t+dt}}{dt} - \frac{m_I \vec{V}_I \big|_{t+dt}}{dt}$$

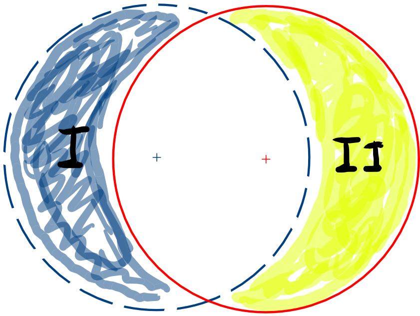
No limite $dt \to 0$

Sistema e Volume de Controle Coincidem

www.cienciastermicas.com

$$\frac{m_s \cdot \vec{V_s}\big|_{t+dt} - m_s \vec{V_s}\big|_{t}}{dt} = \frac{m_{vc} \vec{V}_{vc}\big|_{t+dt} - m_{vc} \cdot \vec{V}_{vc}\big|_{t+dt}}{dt} + \frac{m_{II} \vec{V}_{II}\big|_{t+dt}}{dt} - \frac{m_I \vec{V}_I\big|_{t+dt}}{dt}$$

No limite dt -> 0 Sistema e V.C coincidem



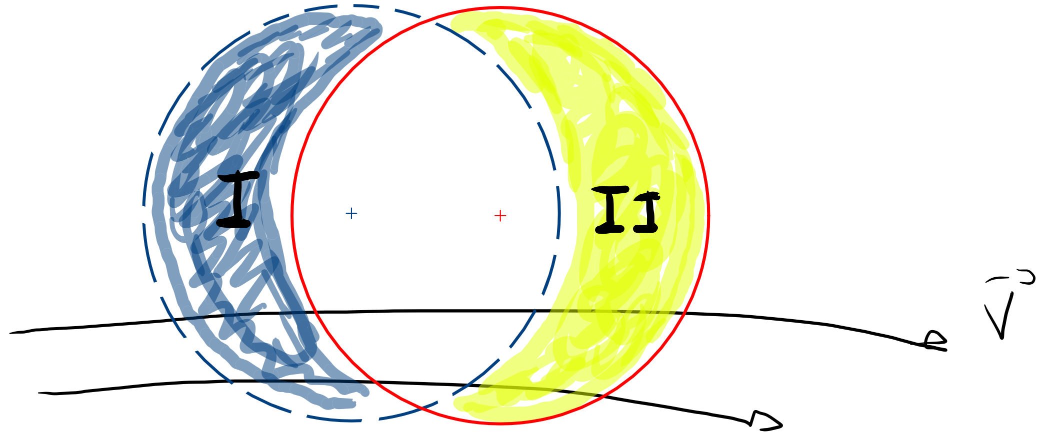
$$\lim_{dt \to 0} \frac{m_s \cdot \vec{V_s}\big|^{t+dt} - m_s \vec{V_s}\big|^{t}}{dt} = \frac{D\, m \cdot \vec{V_s}}{Dt}$$

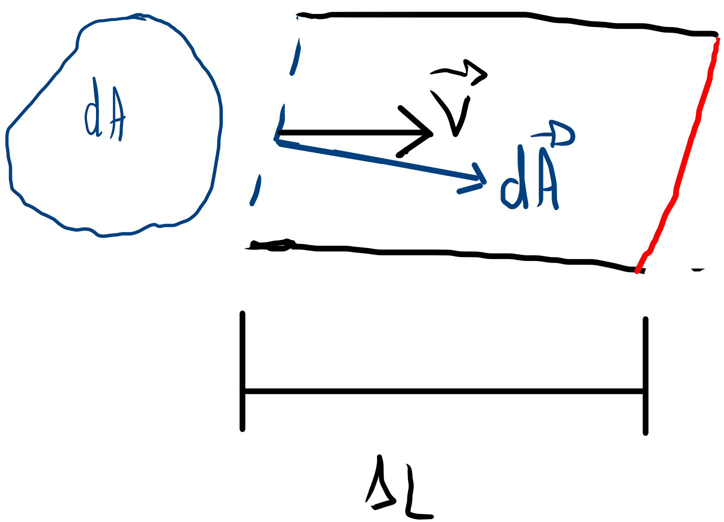
$$\lim_{dt \to 0} \frac{m_{vc} \cdot \vec{V}_{vc}\big|^{t+dt} - m_{vc} \cdot \vec{V}_{vc}\big|^{t}}{dt} = \frac{\partial\, m_{vc} \cdot \vec{V}_{vc}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho \, d\forall \cdot \vec{V}$$

$$\frac{m_{II} \cdot V_{II}\big|^{t+dt}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc_s} \rho \, d\forall \cdot \vec{V_s}$$ taxa saindo do V.C no intervalo dt

$$\frac{m_I \cdot V_I\big|^{t+dt}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc_e} \rho \, d\forall \cdot \vec{V_e}$$ taxa entrando do V.C no intervalo dt

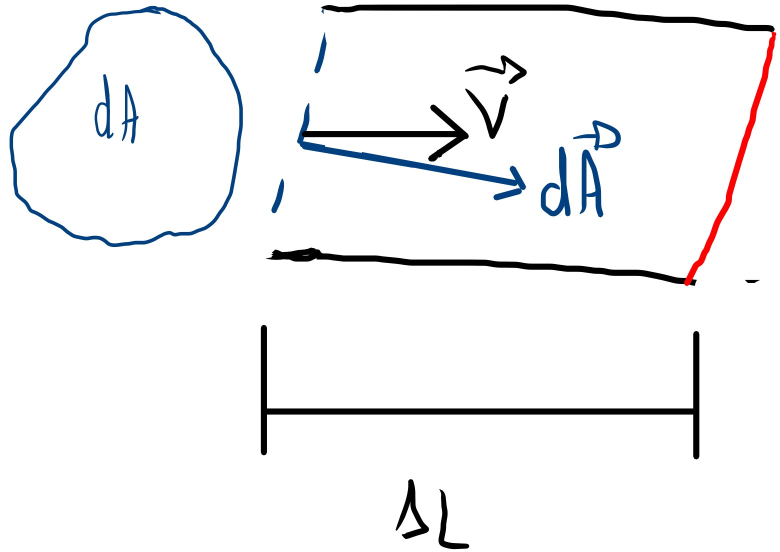
www.cienciastermicas.com





Volume = Área x Comprimento

www.cienciastermicas.com



O volume é paralelo às linhas de corrente mas a área não necessariamente: necessário projetar a área na direção da velocidade

$d\vec{A}\cos\theta \Rightarrow$ projetado em $\vec{V}$

Volume = Área x Comprimento

$$d\forall = d\vec{A}\cos\theta \cdot \Delta L$$

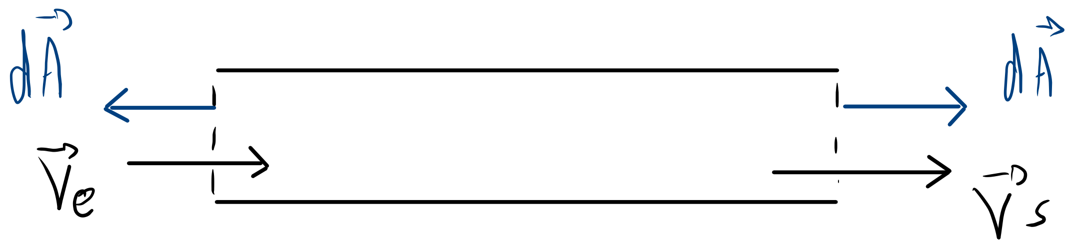
www.cienciastermicas.com

$$d\forall = d\vec{A}\cos\theta \cdot \Delta L$$

Integral na área!

$$\frac{m_{II} \cdot V_{II}^{t+dt}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC_s} \rho \, d\forall \cdot \vec{V}_{II} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{SC^s} \rho \, d\vec{A}\cos\theta \, \Delta L \, \vec{V}_{II} = \int_{SC_s} (\rho \, \vec{V} \cdot d\vec{A}) \cdot \vec{V}_{II}$$

$$\frac{m_I \cdot V_I^{t+dt}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC_e} \rho \, d\forall \cdot \vec{V}_I = \frac{\partial}{\partial t}\int_{SC_e} \rho \, d\vec{A}\cos\theta \, \Delta L \, \vec{V}_I = \int_{SC_e} (\rho \, \vec{V} \cdot d\vec{A}) \cdot \vec{V}_I$$



$$\int_{SC} \rho\, \vec{V}\cdot d\vec{A}\ \vec{V} \rightarrow \vec{V}\cdot d\vec{A} = |\vec{V}|\,|d\vec{A}|\cos\theta\ ,\ \vec{V}$$

LE

$$\theta = 180^\circ \Rightarrow \cos\theta = -1$$

$$\int \rho\, \vec{V}\cdot d\vec{A} < 0$$

LD

$$\theta = 0^\circ \Rightarrow \cos\theta = 1$$

$$\int \rho\, \vec{V}\cdot d\vec{A} > 0$$

$$\dot{m}_s \vec{V}_s - \dot{m}_e \vec{V}_e = \int_{SC} (\rho\, \vec{V}\cdot d\vec{A})\,\vec{V} \begin{cases} > 0 & \dot{m}_s \vec{V}_s > \dot{m}_e \vec{V}_e \\ < 0 & \dot{m}_s \vec{V}_s < \dot{m}_e \vec{V}_e \end{cases}$$

$$\frac{D\, m_s \cdot \vec{V}_s}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} (\rho\, d\forall) \cdot \vec{V} + \oint_{SC} (\rho\, \vec{V} \cdot d\vec{A})\, \vec{V}$$

taxa líquida da quantidade de movimento atravessando (saindo) através da superfície de controle

taxa de variação da quantidade de movimento no V.C

taxa de variação da quantidade de movimento no sistema móvel

* velocidade do fluido relativa ao V.C

A 2ª Lei de Newton

Para um sistema de identidade fixa (fechado)

a quantidade de movimento do sistema é igual à somatória das forças aplicadas no sistema

$$\sum \vec{F}_{sist} = \frac{D\, m_s \cdot \vec{V}_s}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} (\rho \, d\forall) \cdot \vec{V} + \oint_{SC} (\rho \, \vec{V} \cdot d\vec{A}) \, \vec{V}$$

Lado esquerdo: forças

Forças de Corpo

*proporcionais à massa ou ao volume

atuam à distância -> campos de força

Ex. atração gravitacional, forças magnéticas, eletrodinâmicas

Para sistemas em aceleração: forças inerciais -> inerciais e centrífugas

$\vec{f}$ (força de corpo por unidade de massa)

$$\vec{F_c} = m_{sistema}.\vec{f}$$

Forças de Superfície -> Exercidas na superfície

*tensões normais

-> força devido à pressão

*de cisalhamento

-> forças viscosas

-> tensão superficial

Forças de corpo

f (força de corpo por unidade de massa)

$$\vec{F}_c = m_{sistema} . \vec{f}$$

Para dt -> 0: massa do sistema = massa do V.C

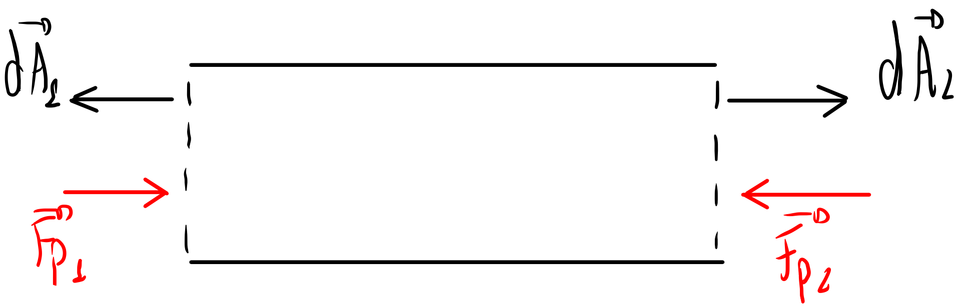
$$\vec{F}_c = \int_{VC} \rho \, d\forall . \vec{f} = \int_{VC} \rho \vec{f} \, d\forall$$

Forças de superfície

Força devido à pressão

atuam sempre comprimindo

$$P = \frac{F}{A} \rightsquigarrow F = P \cdot A$$



$$\left.\begin{array}{l} P \cdot d\vec{A}_1 < 0 \\ \vec{F}_{p1} > 0 \end{array}\right\} \vec{F}_p = -\int_{A_1} P \, d\vec{A}$$

$$\left.\begin{array}{l} P \cdot d\vec{A}_2 > 0 \\ \vec{F}_{p2} < 0 \end{array}\right\} \vec{F}_p = -\int_{A_2} P \cdot d\vec{A}$$

Forças

$$\vec{F}_c = \int_{VC} \rho \, d\forall \cdot \vec{g} = \int_{VC} \rho \vec{g} \, d\forall$$

$$\vec{F}_p = -\int_{SC} p \, d\vec{A}$$

+ forças viscosas

2ª Lei de Newton

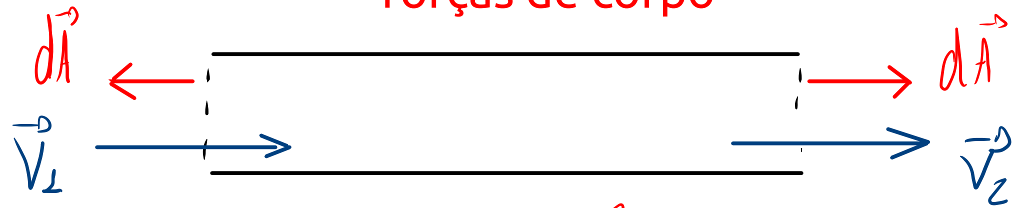
$$\sum \vec{F}_{sist} = \frac{D\, m_s \vec{V}_s}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} (\rho\, d\forall)\,\vec{V} + \oint_{SC} (\rho\, \vec{V}\cdot d\vec{A})\,\vec{V}$$

$$\int_{VC} \rho\, \vec{f}\, d\forall - \int_{SC} p\, d\vec{A} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} (\rho\, d\forall)\,\vec{V} + \oint_{SC} (\rho\, \vec{V}\cdot d\vec{A})\,\vec{V}$$

$+$ forças viscosas

Formulação Integral para V.C fixo no espaço

Para regime permanente Unidimensional sem forças viscosas e desprezando forças de corpo



$$\int_{VC} \cancel{\rho \vec{g}\, d\forall} - \int_{SC} p\, d\vec{A} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} (\rho\, d\forall)\cdot \vec{V}} + \oint_{SC} (\rho\, \vec{V}\cdot d\vec{A})\, \vec{V}$$

+ ~~forças viscosas~~

$$-\left[p_1 \cdot \vec{A_1} + p_2 \cdot \vec{A_2} \right] = (\rho_1 \cdot \vec{V_1} \cdot \vec{A_1})\, \vec{V_1} + (\rho_2\, \vec{V_2} \cdot \vec{A_2}) \cdot \vec{V_2}$$

$$+ p_1 A_1 - p_2 A_2 = (-\rho_1 V_1 A_1) \cdot V_1 + (\rho_2 V_2 A_2) \cdot V_2$$

$$p_1 A_1 - p_2 A_2 = -\rho_1 V_1^2 A_1 + \rho_2 V_2^2 A_2$$

p/ $A_1 = A_2$:

$$\boxed{\rho_2 V_2^2 + p_2 = \rho_1 V_1^2 + p_1}$$